المحاضرة الاولى: المتغير العشوائي المنفصل(المتقطع) و توزيعاته الإحتمالية

تمهيد:

يتم التعبير عن نتائج التجرب العشوائية بمقياس عددي يطلق عليه اسم المتغير (**Variable**)، وبما أن القيم العددية لهذا المتغير غير مؤكدة لذا يطلق عليه بالمتغير العشوائي (**Random Variable**)، إذ أن القيم المختلفة للمتغير العشوائي ترتبط بقيم احتمالية معينة، مما تشكل معاً ما يسمى بالتوزيع الإحتمالي (**Probability Distribution**).

أولا: المتغير العشوائي:

عبارة عن قيمة عددي لكل نتيجة من نتائح التجرب العشوائية، ويرمز له بالرمز (X)، وتكون المتغيرات العشوائية على نوعين هما:

- المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع)؛
- المتغير العشوائي المتصل (المستمر).

1- المتغير العشوائي المنفصل (المتقطع) وتوزيعاته الإحتمالية:

1-1- تعريف: هو المتغير الذي يكون المجال المقابل له منتهياً أو غير منتهٍ ويكون قابلاً للعد، إذ يمكن كتابة قيمته بالشكل التالي:

$$(a): X : x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$$

$$(b): X : x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$$

ومن أمثلة هذا النوع من المتغيرات:

- عدد الحوادث المرورية في مدينة الجزائر خلال شهر ديسمبر؛
- عدد المصابيح التالفة من إنتاج شركة ما لشهر معين؛ -

عدد مرات ظهور الكتاب (T) عند رمي قطعة نقود معدنية (n) من المرات.

1-2- التوزيع الإحتمالي للمتغيرة المتقطعة:

إن لكل قيمة من قيم المتغير العشوائي المنفصل توجد قيمة احتمالية مرافقة له، فعلى سبيل المثال القيمة $(\mathbf{x_i})$ يكون الإحتمال المرافق لها هو $[P(X = x_i)]$ ومنه:

$$X : x_1, x_2, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n$$
$$P(X) : P(X = x_1), P(X = x_2), P(X = x_3), \ldots, P(X = x_i), \ldots, P(X = x_n)$$

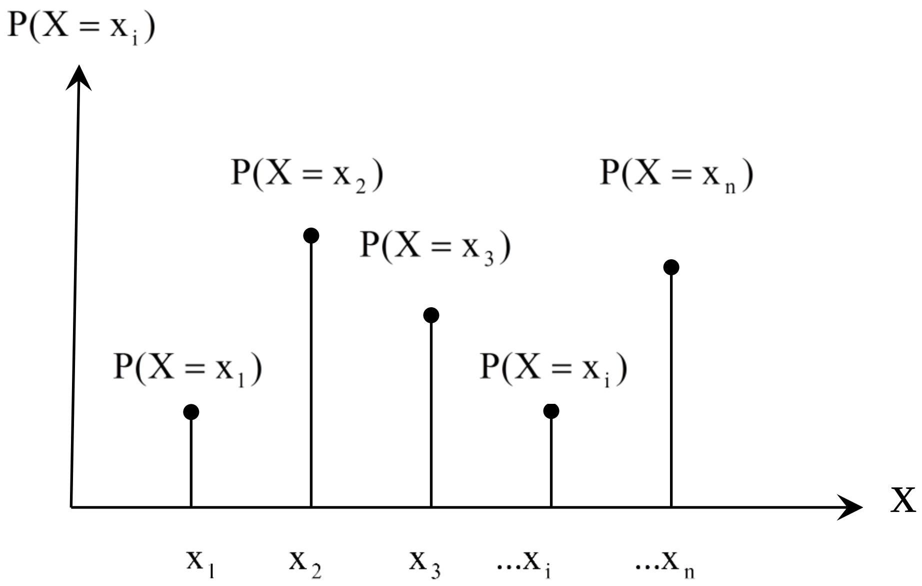
تسمى هذه الإحتمالات بدالة التوزيع الإحتمالي، وتدعى أحياناً بدال الكثافة الإحتمالية للمتغير العشوائي المنفصل (X).

وحتى تكون دالة التوزيع الإحتمالي$[P(X = x_i)]$ هي دالة كثافة احتمالية ينبغي أن تتحقق الشرطين التاليين:

- **الشرط الأول:** $0 < P(X = x_i) < 1$؛

- **الشرط الثاني:** $\sum P(X=x_i)=1$.

والشكل البياني الموالي يوضح دالة التوزيع الإحتمالي الخاصة بالمتغير العشوائي المنفصل.



مثال: عند رمي زهرتي نرد منتظمتين مرة واحدة في تجربة عشوائية.

المطلوب: I- عرف المتغير العشوائي (X) بأنه يمثل مجموع الوجهين الذين يظهران؛

II- إيجاد دالة التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي (X) ؛

الحل:

I - يعرف المتغير العشوائي المنفصل (X) بأنه يمثل مجموع ما يظهر على الوجهين؛ أي أن:

X={مجموع الرقمين التي تظهر على الوجهين}

إن فضاء العينة (S) للتجربة العشوائية المذكورة يكتب كما يلي:

$X=\{(1,1),(1,2),(1,3),...(1,6),....(6,1),(6,2),(6,3),(1,3),...(6,6)\}$

$n(S)=36$

يمكن كتابة قيم المتغير العشوائي المنفصل (X) على فضاء العينة (S) على النحو التالي:

S	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(3,1)	(2,2)	(1,4)	(4,1)	(3,2)	(2,3)	....	(6,6)
X	2	3	4	4	4	5	5	5	5	....	12

عليه فإن المجال المقابل للمتغير العشوائي المنفصل (X) على فضاء العينة (S) يكتب كالتالي:

X= {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12}

II- إيجاد دالة التوزيع الإحتمالي $P(X=x_i)$:

بالرجوع إلى فضاء العينة (S)، يمكن كتابة قيم دالة التوزيع الإحتمالي $[P(X=x_i)]$ لعناصر المجال المقابل للمتغير العشوائي المنفصل (X) على النحو التالي:

S	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(X=x_i)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

وأخيراً يمكن كتابة صيغة دالة التوزيع الإحتمالي $P(X=x_i)$ كالآتي:

$$P(X=x_i)=\begin{cases} 2/36 & ,X_i=2,\ 12 \\ 4/36 & ,X_i=3,\ 11 \\ 6/36 & ,X_i=4,\ 10 \\ 8/36 & ,X_i=5,\ 9 \\ 10/36 & ,X_i=6,\ 8 \\ 6/36 & ,X_i=7 \\ 0 & ,X_i \quad S/n \end{cases}$$

– لإثبات إن دالة التوزيع الإحتمالي $[P(X=x_i)]$ هي دالة كثافة احتمالية ينبغي أن تتحقق ما يلي:

– **الشرط الأول:** $0<P(X=x_i)<1$:

إن جميع القيم الإحتمالية $[P(X=x_i)]$ الواردة سابقاً هي أكبر من الصفر وأقل من الواحد الصحيح، مما يؤكد تحقق الشرط الأول.

– **الشرط الثاني:**

$$\sum_{i=1}^{11}P(X=x_i)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}+\frac{5}{36}+\frac{6}{36}+\frac{5}{36}+\frac{4}{36}+\frac{3}{36}+\frac{2}{36}+\frac{1}{36}$$
$$=1$$

$\therefore$ دالة التوزيع الإحتمالي $[P(X=x_i)]$ هي دالة كثافة احتمالية.

1–3– القيمة المتوقعة والتباين للمتغير العشوائي المنفصل:

إذا كان لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن (X) يأخذ القيم التالية:

$$X: x_1, x_2, \ldots, x_n$$

وإن قيم التوزيع الإحتمالي المرافقة لقيم المتغير العشوائي (X) هي:

$$P(X): P(x_1), P(x_2), \ldots, P(x_n)$$

وعليه تكون:

– القيمة المتوقعة (التوقع الرياضي) للمتغير العشوائي (X) والذي يرمز له بالرمز $E(x)$ أو (μ_x) يكتب على الشكل التالي:

$$E(X_i)=\sum_{i=1}^{n} X_i * P(X_i)$$
$$= x_1 * P(X_1) + x_2 * P(X_2) + \ldots + x_n * P(X_n)$$

- تباين المتغير العشوائي (X) والذي يرمز له بالرمز $V(x)$ أو (σ_x^2) يكتب على الشكل التالي:

$$\sigma_x^2 = E(X_i^2) - [E(Xi)]^2$$
$$= \sum_{i=1}^{n} X_i * P(X_i) - \mu_x^2$$

- الإنحراف المعياري للمتغير العشوائي (X) والذي يرمز له بالرمز (σ_x) يكتب كما يلي:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

1-4- التوزيعات الإحتمالية المنفصلة:

إن المتغيرات العشوائية المنفصلة لها تطبيقات عديدة في الحياة العملية، وقد استخدم لهذا النوع من المتغيرات عدد من التوزيعات الإحتمالية التي تساهم في معالجة هذه التطبيقات، وتكون هذه التوزيعات على عدة أنواع نذكر منها:

- توزيع برنوللي؛
- توزيع ذي الحدين؛
- توزيع بواسون؛
- التوزيع الهندسي؛
- التوزيع فوق الهندسي؛
- التوزيع المنتظم المنفصل.

1-4-1- التوزيع الهندسي:

بافتراض أنه لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن (X) يمثل عدد المحاولات اللازمة للحصول على أول نجاح، ففي هذه الحالة يقال بأن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الهندسي إذا كانت دال التوزيع الإحتمالي له تأخذ الشكل الآتي:

$$P(X=x)=\begin{cases} P(1-P)^{x-1} & ,x=1,2,3,\ldots,\infty \\ 0 & ,S/n \end{cases}$$

وغالباً ما يعبر عن التوزيع الهندسي $X \sim g(p)$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع الهندسي بالمعلمة (P).

$$\begin{cases} \mu_x = \dfrac{1}{P} \\ \sigma^2 = \dfrac{p}{q^2} \\ \sigma = \dfrac{\sqrt{q}}{P} \end{cases}$$

حيث أن: $q = 1 - p$.

1-4-2- التوزيع فوق الهندسي:

إذا كان لدينا مجتمع يحتوي على (N) من العناصر، فيه (N_1) لنوع معين من العناصر نسميها (نجاحاً)، أما المتبقي منه هو $(N - N_1)$ لنوع آخر من العناصر نسميها (فشلاً)، وتم اختيار عينة عشوائية بحجم (n) منه بدون إرجاع، فإن عدد حالات النجاح التي يمكن الحصول عليها هو(N_1)، وإن عدد حالات الفشل هو: $(N - N_1)$ عليه فإن:

عدد طرق اختيار (x) من (N_1) هو $[C_x^{N_1}]$ ويعبر عنه $\begin{pmatrix} N_1 \\ x \end{pmatrix}$.

وعدد طرق اختيار $(n - x)$ من $(N - N_1)$ هو $[C_{n-x}^{N-N_1}]$ ويعبر عنه $\begin{pmatrix} N - N_1 \\ n - x \end{pmatrix}$

وبالتالي فإن عدد الطرق الممكنة لاختيار (x) و $(n - x)$ من (N_1) و $(N - N_1)$ على الترتيب هو: $\begin{pmatrix} N_1 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N - N_1 \\ n - x \end{pmatrix}$.

وعدد الطرق الكلية لاختيار (n) من (N) هو $[C_n^N]$ و يعبر عنه $\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}$.

وبافتراض لدينا متغير عشوائي منفصل وليكن (X) يمثل عدد النجاح التي يمكن الحصول عليها من تجربة من تجربة التوزيع فوق الهندسي، ففي هذه الحالة يقال بأن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع فوق الهندسي، إذا كانت دالة التوزيع الإحتمالي له، تأخذ الشكل التالي:

$$P(X = x) = \begin{cases} \dfrac{\begin{pmatrix} N_1 \\ x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} N - N_1 \\ n - x \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} N \\ n \end{pmatrix}} & , x = 0,1,2,\ldots,n \\ 0 & ,S/n \end{cases}$$

و غالباً ما يعبر عن التوزيع فوق الهندسي اختصاراً بالإصطلاح الآتي: $X \sim h(N_1, N - N_1)$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق التوزيع فـوق الهندسـي بـالمعلمتين (N_1) و $(N - N_1)$.

إن الوسط الحسابي (μ_X) والتباين (σ_X^2)والإنحراف المعياري(σ_X)للتوزيع فوق الهندسي تكتب علـى النحـو التالي:

$$\begin{cases} \mu_x = n \times \dfrac{N_1}{N} \\ \sigma^2 = n \times \dfrac{N_1}{N}\left(1 - \dfrac{N_1}{N}\right)\left(\dfrac{N - n}{N - 1}\right) \\ \sigma = \sqrt{\sigma_X^2} \end{cases}$$

إذ أن: $\dfrac{N-n}{N-1}$: يمثل معامل التصحيح (خاص بالمجتمعات المحدودة).

1-4-3- توزيع برنوللي:

تُعرّف تجرب برنوللي بأنها تجربة تكون نتيجتها إما نجاحاً وتحدث باحتمال (P)، أو فشلاً وتحدث باحتمال $(1-P)$.

إن المتغير العشوائي (X) لتجربة برنوللي، يأخذ قيمتين فقط هما $(0،1)$، حيث أن القـيم (1) تمثـل حالـة (النجاح)، أما القيمة (صفر) فتمثل حالة (الفشل)، ويكتب التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي (X) على النحو التالي:

$$P(X = x) = \begin{cases} P^X (1-P)^{1-X} & , x = 0,1 \\ 0 & , s/n \end{cases}$$

إن الوسط الحسابي (μ) والتباين (σ^2) والإنحراف المعياري (σ) لتوزيع برنوللي هي:

$$\begin{cases} \mu = p \\ \sigma^2 = pq \\ \sigma = \sqrt{pq} \end{cases}$$

حيث: $q = 1 - p$

- خصائص توزيع برنوللي:

إن أي تجربة إحصائية تحقق الشروط التالية تسمى تجربة برنوللي:

- لكل محاول من المحاولات نتيجتين فقط إما ربح أو خسارة؛
- إن نتيجة كل محاولة تعد مستقل عن نتيج المحاولات الأخرى؛
- إن احتمال إنجاح ثابت لجميع المحاولات، و ليكن (P)، لذا فإن احتمال الفشل سيكون هو الآخر ثابت وليكن $(1-p)$.

1-4-4- التوزيع الثنائي (ذي الحدين):

إذا كرّرنا تجربة برنوللي (n) مرة فإننا في هذه الحال نحصل في كل مرة إما على حالة نجاح باحتمال (P) أو حالة فشل باحتمال $(1-p)$.

عليه فإن المتغير العشوائي (X) الذي يمثل عدد مرات (النجاح) لهذا النوع من التجارب، يقال بأنه توزيع وفـــق توزيع ذي الحدين، إذا كانت دالة التوزيع الإحتمالي له تأخذ الشكل التالي:

$$P(X=x)=\begin{cases} C_x^n P^x (1-p)^{n-x} & ,x=0,1,2...,n \\ 0 & ,S/n \end{cases}$$

وغالباً ما يعبر عن التوزيع ذي الحدين اختصاراً الإصطلاح التالي:

$$X \sim b(n\ ,p)$$

وهذا يعني أن المتغير العشوائي (X) يتوزع وفق توزيع ذي الحدين، بالمعلمتين (n) و (p).

إن الوسط الحسابي (μ_x) و التباين (σ_x^2) والإنحراف المعياري (σ_x)لتوزيع ذي الحدين هو على النحو التالي:

$$\begin{cases} \mu_x = np \\ \sigma^2 = npq \\ \sigma = \sqrt{npq} \end{cases}$$

حيث: $q=1-p$.

- خصائص توزيع ذي الحدين:

إن أي تجربة إحصائية تحقق الشروط التالية تسمى توزيع ذي الحدين:

- لكل محاولة من المحاولات نتيجتين فقط هما "**نجاح**" أو "**فشل**"؛
- إن نتيجة كل محاول تعد مستقلة عن نتيجة المحاولات الأخرى في التجربة؛
- إن احتمال النجاح ثابت لجميع المحاولات وليكن (p)، لذا فإن احتمال الفشل سيكون هو الآخر ثابت وهو $(1-p)$؛
- تتضمن تجربة ذي الحدين على عدد من المحاولات وليكن (n)، وإن (n) عبارة عن حجم العينة.

- استخدامات تجربة ذي الحدين:

إن استخدامات تجرب ذي الحدين كبير نذكر منها:

- طبيعة الإنتاج (معيب أو جيد)؛
- نتيجة رمي عملة معدنية (صورة أو كتابة)؛
- إسقاط طائرة أو عدم إسقاطها؛
- نتيجة الإمتحان النهائي لمادة معينة (رسوب أو نجاح)...

1-4-5- التوزيع المنتظم:

أحياناً عند إجراء تجربة عشوائية، تكون جميع النتائج لها نفس فرصة الحدوث، أي نفس الإحتمال، فنقول في هذه الحالة أن النتائج تمثل توزيعاً منتظماً.

فإذا كان (X) متغير عشوائي له توزيع منتظم فإن دالة الكثافة الإحتمالية له هي:

$$P(x)=\frac{1}{n} \quad ,x=0,1,2,\ldots,n$$

حيث (n) هي عدد موجب وهو معلمة التوزيع.

ونعبر عن ذلك بالصيغة التالية:

$$X \sim U(n)$$

والمؤشرات الخاصة للتوزيع هي:

$$\begin{cases} \mu_x = \dfrac{n+1}{2} \\ \sigma_x^2 = \dfrac{n^2-1}{12} \\ \sigma_x = \sqrt{\dfrac{n^2-1}{12}} \end{cases}$$

مثال: بفرض أن (X) متغير عشوائي له توزيع منتظم معطى بالعلاقة:

$$P(x)=\frac{1}{9} \qquad ,x=0,1,2,\ldots,9$$

المطلوب: أوجد المؤشرات الإحصائية للتوزيع.

الحل:

$$\begin{cases} \mu = 5 \\ \sigma^2 = 6.67 \\ \sigma = 2.58 \end{cases}$$