

## Chapitre 2

### Théorie de la couche limite

#### 2.1 Introduction :

Les couches limites sont des zones d'écoulement très minces où les forces de frottement (les forces visqueuses) sont importantes. Au sein de ces couches, la vitesse parallèle à la paroi augmente rapidement à partir de zéro et s'approche à une valeur donnée par l'écoulement non visqueux à l'extérieur de la couche. Cette variation se produit donc sur une distance caractéristique de la couche  $\delta$ . La couche limite est mince lorsque le rapport  $\delta/l \ll 1$ , où  $l$  représente une dimension caractéristique de la paroi du corps face à l'écoulement (Fig.2.1).

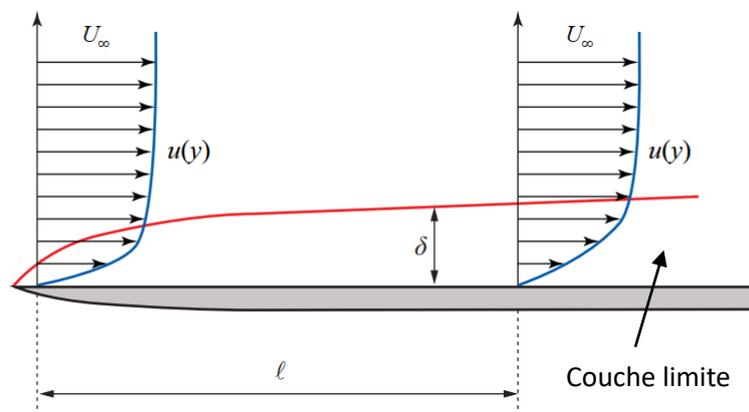


Fig.2.1 Développement de la couche limite sur une plaque plane

L'augmentation de la vitesse avec l'augmentation de la distance de la surface solide indique que les contraintes de cisaillement sont présentes. Étant donné que la couche est généralement très mince, le gradient de vitesse est élevé et les contraintes de cisaillement sont donc importantes. En 1904, Prandtl a suggéré qu'un écoulement externe peut être considéré en deux parties: (1) que dans la couche limite où les contraintes de cisaillement sont d'une importance primordiale et (2) qu'au-delà de la couche limite où les gradients de vitesse sont petits et donc l'effet de la viscosité est négligeable. Dans cette seconde partie, l'écoulement est donc essentiellement celui d'un fluide non visqueux.

La figure (2.2) compare les comportements du fluide parfait et du fluide réel dans des cas d'écoulements typiques.

Types d'écoulement Type de fluide	Sur une plaque	Dans une conduite	Autour d'un profil
Fluide parfait (non-visqueux)			
Fluide réel (visqueux)			

Fig.2.2 Profils de vitesse pour différentes configurations d'un fluide parfait et un fluide réel.

Quelques unes des caractéristiques de la couche limite sont :

- L'ordre de grandeur de la distance et de la composante de vitesse parallèles à la paroi est très grand devant celui de la distance et la composante de vitesse normale à la paroi.
- La frontière libre de la couche limite sépare la zone d'écoulement visqueux de la zone non-visqueuse.
- La vitesse du fluide à la paroi égale la vitesse de la paroi elle-même (nulle si la paroi est fixe).
- La couche limite commence par se développer en régime laminaire ( $Re_x < 10^5$ ), passe par une zone de transition ( $10^5 < Re_x < 2 \times 10^6$ ), puis devient turbulente ( $Re_x > 2 \times 10^6$ ).  
 $Re_x = \rho U_\infty x / \mu$  ; où :  $\rho$  est la masse volumique du fluide,  $\mu$  sa viscosité,  $U_\infty$  la vitesse hors de la couche limite et  $x$  la distance le long de la paroi (Fig.2.3).

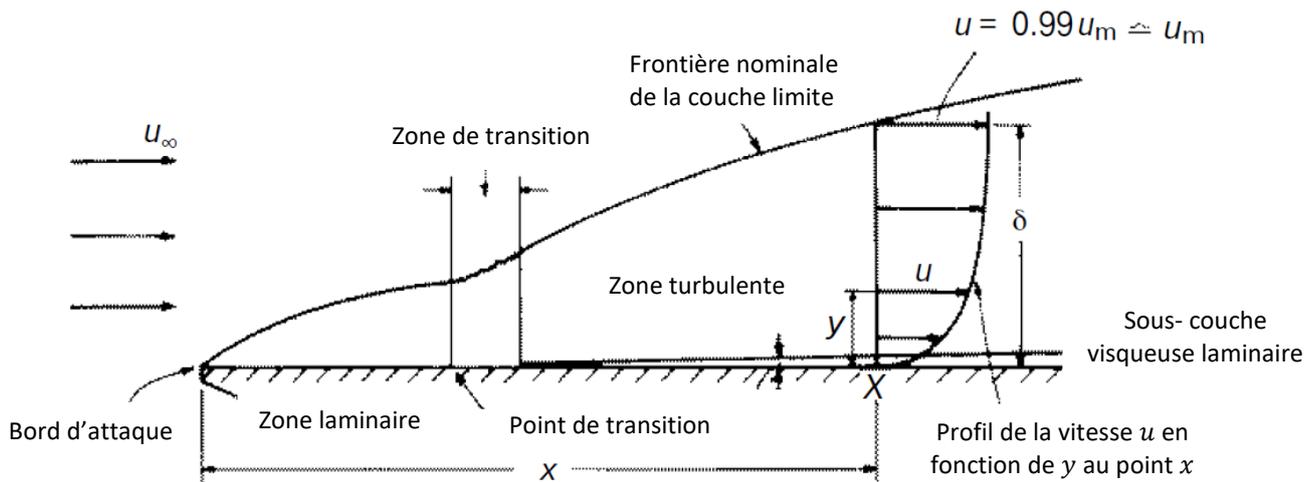


Fig.2.3 Développement de la couche limite sur une plaque plane pour différents régimes.

## 2.2 Paramètres caractéristiques de la couche limite :

### 2.2.1 Épaisseur de déplacement $\delta^*$ :

On définit l'épaisseur de déplacement  $\delta^*$  de la couche limite pour quantifier le déplacement effectif de l'écoulement externe attribuable à l'existence de la couche limite. Cette épaisseur correspondant à celle d'une couche de fluide stagnant à la paroi qui causerait la même réduction de débit - masse que la couche limite réelle (Fig.2.4).

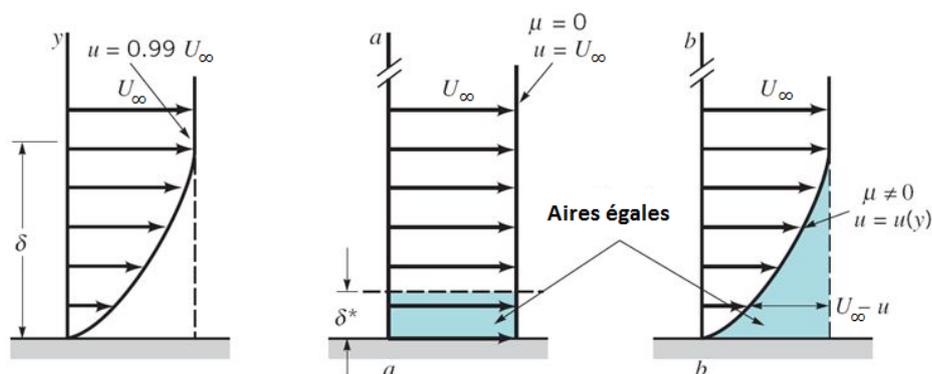


Fig.2.4 Épaisseur de déplacement de la couche limite.

Le débit du fluide dans la couche limite à travers la section  $\delta \times 1m$  s'exprime :

Si le fluide est réel :

$$Q = \int_0^{\delta} u \, dy$$

Si le fluide est idéal :

$$Q_i = \int_0^{\delta} U_{\infty} \, dy$$

La différence entre le débit idéal et le débit réel est :

$$Q_i - Q = \int_0^{\delta} (U_{\infty} - u) dy$$

On définit l'épaisseur de déplacement  $\delta^*$  telle que :

$$U_{\infty} \delta^* = \int_0^{\delta} (U_{\infty} - u) dy$$

Donc :

$$\delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (2.1)$$

### 2.2.2 Epaisseur de la quantité de mouvement $\theta$ :

Pour un débit massique réel de fluide traversant la section  $\delta \times 1m$ :

$$\dot{m} = \int_0^{\delta} \rho u dy$$

Le flux réel de quantité de mouvement :

$$Q\dot{M} = \int_0^{\delta} (\rho u dy) u$$

Le flux idéal de quantité de mouvement :

$$Q\dot{M}_{id} = \int_0^{\delta} (\rho u dy) U_{\infty}$$

La différence entre les flux de quantité de mouvement idéal et réel est:

$$Q\dot{M}_{id} - Q\dot{M} = \int_0^{\delta} \rho u (U_{\infty} - u) dy$$

On définit l'épaisseur de quantité de mouvement  $\theta$  telle que :

$$\rho U_{\infty}^2 \theta = \int_0^{\delta} \rho u (U_{\infty} - u) dy$$

Donc :

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\infty}} \left(1 - \frac{u}{U_{\infty}}\right) dy \quad (2.2)$$

### 2.2.3 Epaisseur de l'énergie cinétique $\delta_E$ :

Pour un débit massique réel:

$$\dot{m} = \int_0^{\delta} \rho u dy$$

Le flux réel de l'énergie cinétique :

$$E\dot{C} = \int_0^{\delta} (\rho u dy) \frac{u^2}{2}$$

Le flux idéal de l'énergie cinétique :

$$\dot{E}C_{id} = \int_0^{\delta} (\rho u dy) \frac{U_{\infty}^2}{2}$$

La différence entre les flux idéal et réel est:

$$\dot{E}C_{id} - \dot{E}C = \int_0^{\delta} \rho u \left( \frac{U_{\infty}^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right) dy$$

On définit épaisseur de l'énergie cinétique  $\delta_E$  telle que :

$$\rho \left( \frac{U_{\infty}^2}{2} \right) \delta_E = \int_0^{\delta} \rho u \left( \frac{U_{\infty}^2}{2} - \frac{u^2}{2} \right) dy$$

Donc :

$$\delta_E = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_{\infty}} \left( 1 - \frac{u^2}{U_{\infty}^2} \right) dy \quad (2.3)$$

### 2.2.4 Facteur de forme $H$ :

Il est défini par  $H = \delta^*/\theta$ . Ce facteur est interprété comme étant un paramètre caractérisant la forme du profil de la vitesse du fluide dans la couche limite (Fig.2.5).

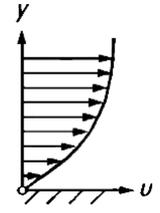
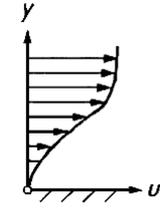
Couche limite laminaire	
attachée ( $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$ )	Décollée ( $\frac{\partial p}{\partial x} > 0$ )
	
$H = 2.6$	$H = 4.0$

Fig.2.5 Effet du facteur de forme sur le profil de vitesse de la couche limite.

### 2.2.5 Contrainte à la paroi :

$$\tau_P = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (2.4)$$

### 2.2.6 Coefficient de frottement local :

$$C_f = \frac{\tau_P}{\frac{1}{2} \rho U_{\infty}^2} \quad (2.5)$$

### 2.2.7 Coefficient de frottement global :

$$C_F = \frac{1}{S} \int_S C_f dS = \frac{1}{X} \int_0^X C_f dx \quad (2.6)$$

### 2.3 Equations de la couche limite – Approximation de Prandtl :

Afin de mettre en évidence le phénomène de la couche limite, nous considérons les équations de Navier–Stokes et la conservation de la masse qui régissent l'écoulement stationnaire laminaire bidimensionnel d'un fluide Newtonien incompressible (les forces volumiques sont négligées):

Suivant  $x$  :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2.7)$$

Suivant  $y$  :

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (2.8)$$

L'équation de continuité s'écrit :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2.9)$$

Pour estimer l'ordre de grandeur de différents termes dans les équations de mouvement, il est logique de supposer que l'épaisseur locale de la couche limite  $\delta$  dans la direction  $y$  est très inférieure à la distance  $l$  par rapport au début du bord d'attaque dans la direction  $x$  :  $\delta \ll l$ .

Posons :  $\frac{\delta}{l} = \epsilon$

Admettons aussi que pour une variable  $\phi$  on peut écrire que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} \sim \frac{\phi}{l} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} \sim \frac{\phi}{\delta} = \frac{\phi}{\epsilon l}$$

Où :  $\sim$  signifie « a le même ordre grandeur que ».

$$\frac{\partial u}{\partial x} \sim \frac{u}{l} \quad \text{et} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \sim \frac{v}{\delta}$$

Or :  $\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}$ ,

ce qui nous permet :

$$\frac{u}{l} \sim \frac{v}{\delta}$$

Donc :  $v \sim \frac{\delta}{l} u = \epsilon u$

Ceci montre que la composante de la vitesse perpendiculaire à la paroi est d'un ordre de grandeur très inférieur à la composante parallèle  $v \ll u$ .

Evaluons maintenant l'ordre de grandeur des termes de l'équation (2.7) :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} \sim u \cdot \frac{u}{l} = \frac{u^2}{l}$$

$$u \frac{\partial u}{\partial y} \sim \epsilon u \cdot \frac{u}{\epsilon l} = \frac{u^2}{l}$$

Soient  $U_\infty$  et  $P_\infty$ , la vitesse et la pression respectivement dans l'écoulement hors de la couche limite.

La variation de pression à travers la couche limite est négligeable. Ceci implique qu'en tout point, la pression doit être la même qu'à la frontière avec l'écoulement extérieur. Le gradient de pression est donc pratiquement longitudinal.

Il est clair que  $\frac{\partial p}{\partial x}$  à l'intérieur de la couche limite a le même ordre de grandeur que  $\frac{dP_\infty}{dx}$  à l'extérieur.

Les effets de la viscosité sont négligeables à l'extérieur de la couche limite, donc on peut appliquer l'équation de Bernoulli le long d'une ligne de courant comme pour un fluide parfait :

$$P_\infty + \rho \frac{U_\infty^2}{2} = C^{te}$$

Ou :

$$\frac{dP_\infty}{dx} + \rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = 0 \quad (2.10)$$

Ce qui permet d'écrire :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} \sim -\frac{1}{\rho} \frac{dP_\infty}{dx} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} = u \frac{u}{l} = \frac{u^2}{l}$$

Par définition de la couche limite, le terme de transport de quantité de mouvement par convection (forces d'inertie) et le terme de transport de quantité de mouvement par diffusion visqueuse (forces de frottement) sont du même ordre de grandeur :

Les forces de frottement (par unité de masse du fluide) sont représentées par le terme :

$$\vartheta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \sim \vartheta \left( \frac{U}{l^2} + \frac{U}{\epsilon^2 l^2} \right) \approx \frac{\vartheta U^2}{\epsilon^2 l^2}$$

Rappelons que l'ordre de grandeur des forces d'inertie (par unité de masse du fluide) est :

$$\frac{U^2}{l}$$

Donc, on doit avoir :

$$\frac{\vartheta u^2}{\epsilon^2 l^2} \sim \frac{u^2}{l}$$

$$\epsilon \sim \sqrt{\frac{\vartheta}{ul}} = Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

En gardant seulement les termes d'ordre  $\frac{u^2}{l}$ , l'équation de quantité de mouvement suivant  $x$ , initialement elliptique devient parabolique :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

Concernant l'équation (2.8), mis à part le terme du gradient de pression, tous les autres termes ont l'ordre de grandeur de  $\epsilon \frac{U^2}{l}$ . Donc il est impossible que l'ordre de grandeur de  $-\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$  soit supérieur à  $\epsilon \frac{U^2}{l}$ . L'équation (2.8) se réduit donc à  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$ .

### Remarque :

L'intégration de  $\frac{\partial p}{\partial y} = 0$  partiellement par rapport à  $y$  donne  $p = P_\infty(x)$ .

Alors, on a :  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{dP_\infty}{dx} = -\rho U_\infty \frac{dU_\infty}{dx}$

Les équations finales de la couche limite laminaire s'écrivent :

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} & (2.11) \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 & (2.12) \end{cases}$$

C'est un système de 2 équations à 2 inconnues  $u$  et  $v$ . Généralement  $u$  est obtenue de la première et  $v$  de la deuxième équation.

### 2.4 Equation de Karman :

C'est la forme intégrale de l'équation de quantité de mouvement (intégrée par rapport à  $y$ ).

Réarrangeant les équations (2.11) et (2.12) comme suit :

$$\left\{ -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} - u \frac{\partial u}{\partial x} - v \frac{\partial u}{\partial y} \right. \quad (2.13)$$

$$\left. (U_\infty - u) \frac{\partial u}{\partial x} + (U_\infty - u) \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \right. \quad (2.14)$$

$\tau = \nu \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \nu \frac{\partial u}{\partial y}$  est la contrainte de cisaillement en un point quelconque dans la couche limite.

La combinaison de (2.13) et (2.14) donne :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} &= U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} + \left( u \frac{dU_\infty}{dx} - u \frac{dU_\infty}{dx} \right) + U_\infty \frac{\partial u}{\partial x} + U_\infty \frac{\partial v}{\partial y} + \left( v \frac{\partial U_\infty}{\partial y} - v \frac{\partial U_\infty}{\partial y} \right) - 2u \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial y} \\ &\quad - v \frac{\partial u}{\partial y} \end{aligned}$$

Réarrangeant :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \left( u \frac{dU_\infty}{dx} + U_\infty \frac{\partial u}{\partial x} - 2u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \left( U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} - u \frac{dU_\infty}{dx} \right) - v \frac{\partial U_\infty}{\partial y} - \left( u \frac{\partial v}{\partial y} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Ou encore :

$$-\frac{1}{\rho} \frac{\partial \tau}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} (U_\infty u - u^2) + (U_\infty - u) \frac{dU_\infty}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} (vU_\infty - uv)$$

Maintenant, intégrant partiellement par rapport à  $y$  de 0 à  $\infty$ .

Rappelons que  $x$  est la seule variable qui reste indépendante et on obtient :

$$-\frac{1}{\rho} (\tau_\infty - \tau_P) = \frac{d}{dx} \int_0^\infty (U_\infty u - u^2) dy + \frac{dU_\infty}{dx} \int_0^\infty (U_\infty - u) dy + [vU_\infty - uv]_0^\infty$$

$$\frac{\tau_P}{\rho} = \frac{d}{dx} \left[ U_\infty^2 \int_0^\infty \frac{u}{U_\infty} \left( 1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy \right] + \frac{dU_\infty}{dx} U_\infty \int_0^\infty \left( 1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy$$

Ou bien :

$$\frac{\tau_P}{\rho} = \frac{d}{dx} [U_\infty^2 \theta] + U_\infty \frac{dU_\infty}{dx} \delta^*$$

Sous forme adimensionnelle :

$$\underbrace{\frac{\tau_P}{\rho U_\infty^2}}_{(i)} = \underbrace{\frac{d\theta}{dx}}_{(ii)} + \underbrace{\frac{\theta(2+H)}{U_\infty}}_{(iii)} \frac{dU_\infty}{dx} \quad (2.15)$$

C'est l'équation de Von Karman valable pour les régimes laminaire et turbulent. Elle exprime un bilan intégral de forces suivant  $x$  :

Le terme : (i) représente la force de frottement sur la paroi.

(ii) représente la décélération du fluide dans la couche limite.

(iii) représente la force due au gradient de pression.

A noter que l'équation intégrale d'énergie dans le régime laminaire peut s'écrire comme suit :

$$\mu \int_0^\infty \left( \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 dy = \frac{1}{2} \rho \frac{d}{dx} (U_\infty^3 \delta_E) \quad (2.16)$$

$\delta_E$  : est l'épaisseur d'énergie cinétique.

Ou : le premier membre représente l'énergie dissipée sous forme de chaleur et le second la perte d'énergie cinétique dans la couche limite.

## 2.5 Solution exacte de Blasius :

Le problème de la couche limite laminaire sur une plaque plane, parallèle à l'écoulement, dans un gradient de pression nul ( $U_\infty = C^{te}$ ) a été étudié par Blasius en 1908. Les équations du mouvement sont :

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (2.17)$$

$$\begin{cases} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \vartheta \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \end{cases} \quad (2.18)$$

Auxquelles on adjoint les conditions aux limites :

$$\begin{cases} u(x, y = 0) = v(x, y = 0) = 0 \\ u(x, y = \infty) = U_\infty \end{cases} \quad (2.19)$$

Introduisons les variables adimensionnelles suivantes :

$$\eta = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta x}} \quad \text{et} \quad f(\eta) = \frac{\psi}{\sqrt{\vartheta x U_\infty}} \quad (2.20)$$

On a donc :

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \sqrt{\vartheta x U_\infty} f' \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty f'$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty \vartheta}{x}} (\eta f' - f)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = U_\infty f'' \frac{\partial \eta}{\partial x} = U_\infty f'' y \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta}} \left(\frac{1}{2}\right) x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{U_\infty}{2x} \eta f''$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = U_\infty f'' \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty \frac{\eta}{y} f'' = U_\infty f'' \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta x}}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = U_\infty \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta x}} f''' \frac{\partial \eta}{\partial y} = U_\infty \frac{\eta^2}{y^2} f'''$$

Substituant dans l'équation (2.18) :

$$U_\infty f' \left( -\frac{U_\infty}{2x} \eta f'' \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty \vartheta}{x}} (\eta f' - f) U_\infty \frac{\eta}{y} f'' = U_\infty \frac{\eta^2}{y^2} f'''$$

$$f''' + \frac{1}{\vartheta} \frac{\eta^2 U_\infty}{y^2 2x} \eta f' f'' - \frac{y}{2\vartheta \eta} \sqrt{\frac{U_\infty \vartheta}{x}} \eta f' f'' + \frac{y}{2\vartheta \eta} \sqrt{\frac{U_\infty \vartheta}{x}} f' f'' = 0$$

$$f''' + \frac{y^2}{\vartheta y \sqrt{\frac{U_\infty \vartheta}{x}}} \frac{U_\infty^2}{x^2} f' f'' - \frac{y}{\vartheta} \sqrt{\frac{U_\infty \vartheta}{4x}} f' f'' + \frac{1}{2\vartheta} \frac{y \sqrt{\frac{U_\infty \vartheta}{x}}}{\sqrt{\frac{U_\infty \vartheta}{x}}} f' f'' = 0$$

$$2f''' + f f'' = 0 \quad (2.21)$$

Les conditions aux limites (2.19) deviennent :

$$\text{Quand : } \begin{cases} \eta = 0 & ; & f = f' = 0 \\ \eta \rightarrow \infty & ; & f' \rightarrow 1 \end{cases} \quad (2.22)$$

La résolution de cette équation a été effectuée par Blasius. Le tableau suivant montre quelques résultats numériques de  $f$ ,  $f'$  et  $f''$ .

$\eta$	$f$	$f' = \frac{u}{U_\infty}$	$f''$
0	0	0	0.332
0.2	0.007	0.066	0.332
1.0	0.166	0.330	0.323
3.0	1.397	0.846	0.161
5.0	3.283	0.992	0.016
8.0	6.279	1.000	0.000

On peut déduire de cette solution exacte de Blasius, les expressions exactes suivantes des caractéristiques de la couche limite.

- **L'épaisseur de la couche limite :**

Si l'on définit  $\delta$  la valeur de  $y$  à laquelle  $\frac{u}{U_\infty} = 0.99$  alors la valeur de  $\eta$  telle que  $f'(\eta) = 0.99$  est :

$$\eta = 4.92 = y \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta x}} \rightarrow 4.92 = \delta \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta x}} = \frac{\delta}{x} \sqrt{\frac{U_\infty x}{\vartheta}}$$

$$\frac{\delta}{x} = \frac{4.92}{\sqrt{Re_x}} \quad \text{où} \quad Re_x = \frac{U_\infty x}{\vartheta}$$

- **La composante de vitesse suivant  $y$  :**

$$v = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{U_\infty \vartheta}{x}} (\eta f' - f)$$

$$\frac{v}{U_\infty} = \frac{1}{2\sqrt{Re_x}} (\eta f' - f)$$

Quand  $\eta \rightarrow \infty$   $\frac{v}{U_\infty} \rightarrow \frac{0.865}{\sqrt{Re_x}}$  ( $\ll 1$  quand on s'éloigne du bord d'attaque)

- **La contrainte tangentielle à la paroi :**

$$\tau_P = \rho \vartheta \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \rho \vartheta U_\infty \left. \frac{\partial f'}{\partial y} \right|_{y=0} = \rho \vartheta U_\infty f''_{\eta=0} \left. \frac{\partial \eta}{\partial y} \right|_{y=0}$$

$$= \rho \vartheta U_\infty f''_{\eta=0} \sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta x}} = \frac{\rho U_\infty^2}{\sqrt{Re_x}} f''_{\eta=0}$$

$$\frac{\tau_p}{\rho U_\infty^2} = 0.332 Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

- **Le coefficient de frottement local:**

$$C_f = \frac{\tau_p}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 0.664 Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

- **Le coefficient de frottement global:**

Sur une longueur  $x = l$  de la paroi :

$$C_F = \frac{1}{l} \int_0^l C_f dx = \frac{0.664}{l} \int_0^l \frac{dx}{\sqrt{Re_x}} = 1.328 Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

- **L'épaisseur de déplacement :**

$$\begin{aligned} \delta^* &= \int_0^\infty \left(1 - \frac{u}{U_\infty}\right) dy = \int_0^\infty (1 - f') \left(\sqrt{\frac{U_\infty}{\vartheta x}}\right)^{-1} d\eta = \frac{x}{\sqrt{Re_x}} [\eta - f]_0^\infty \\ &= \frac{x}{\sqrt{Re_x}} \lim_{\eta \rightarrow \infty} (\eta - f) = \frac{x}{\sqrt{Re_x}} 1.729 \\ \frac{\delta^*}{x} &= 1.729 Re_x^{-\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

- **L'épaisseur de quantité de mouvement :**

Dans ce cas ( $\frac{dP_\infty}{dx} = \frac{dU_\infty}{dx} = 0$ ) l'équation intégrale de Von Karman se simplifie à :

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{\tau_p}{\rho U_\infty^2} = \frac{0.332}{\sqrt{Re_x}}$$

Sachant que  $\theta(0) = 0$ , l'intégration donne :

$$\theta = 0.332 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{Re_x}} = 0.332 \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\frac{U_\infty x}{\vartheta}}}$$

Ce qui mène à :

$$\frac{\theta}{x} = 0.664 Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

## 2.6 Solution approchée :

Supposant un profil de vitesse de la forme :

$$\frac{u}{U_\infty} = A + B \left(\frac{y}{\delta}\right) + C \left(\frac{y}{\delta}\right)^2 + D \left(\frac{y}{\delta}\right)^3$$

Pour déterminer les coefficients  $A$ ,  $B$ ,  $C$  et  $D$ , quatre conditions sont à imposer sur le profil de vitesse :

$$u(0) = 0, \quad u(\delta) = U_\infty, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=\delta} = 0, \quad \left. \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right|_{y=0} = 0$$

La dernière équation est déduite de l'équation de quantité de mouvement :  $u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(quand  $y \rightarrow 0$ ,  $u$  et  $v \rightarrow 0$ )

On trouve :

$$\frac{u}{U_\infty} = \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3$$

Des expressions approchées des paramètres caractéristiques de la couche limite sont maintenant obtenues sur la base de ce profil de vitesse (qui n'est pas exacte).

- **L'épaisseur de déplacement :**

$$\delta^* = \int_0^\delta \left( 1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy = \int_0^\delta \left[ 1 - \left( \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \right) \right] dy = \frac{3}{8} \delta$$

- **L'épaisseur de quantité de mouvement:**

$$\theta = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left( 1 - \frac{u}{U_\infty} \right) dy = \frac{39}{280} \delta$$

- **L'épaisseur de l'énergie cinétique:**

$$\delta_E = \int_0^\delta \frac{u}{U_\infty} \left( 1 - \frac{u^2}{U_\infty^2} \right) dy = \frac{69}{320} \delta$$

- **L'épaisseur de la couche limite:**

L'équation de Von Karman s'écrit :

$$\tau_P = \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx}$$

$$\tau_P = \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{d\delta} \frac{d\delta}{dx} = \frac{39}{280} \rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \quad (i)$$

D'autre part :

$$\tau_P = \mu \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{y=0} = \mu \frac{\partial}{\partial y} \left[ U_\infty \left( \frac{3}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right) - \frac{1}{2} \left( \frac{y}{\delta} \right)^3 \right) \right]_{y=0} = \frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{\delta} \quad (ii)$$

Egalisant les deux équations (i) et (ii) :

$$\frac{3}{2} \frac{\mu U_\infty}{\delta} = \frac{39}{280} \rho U_\infty^2 \frac{d\delta}{dx} \quad \text{avec : } \delta = 0 \text{ à } x = 0$$

$$\int_0^x dx = \frac{13}{140} \frac{\rho U_\infty}{\mu} \int_0^\delta \delta d\delta \quad \rightarrow \quad x = \frac{13}{280} \frac{\rho U_\infty}{\mu} \delta^2$$

$$\frac{\delta^2}{x^2} = \frac{280}{13} \left( \frac{\mu}{\rho U_\infty x} \right) \quad \rightarrow \quad \frac{\delta}{x} = 4.64 (Re_x)^{-\frac{1}{2}}$$

On en déduit que :

$$\delta^* = \frac{3}{8}\delta = \frac{3}{8}4.64x(Re_x)^{-\frac{1}{2}} \rightarrow \frac{\delta^*}{x} = 1.74Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\theta = \frac{39}{280}\delta \rightarrow \frac{\theta}{x} = 0.646Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\delta_E = \frac{69}{320}\delta \rightarrow \frac{\delta_E}{x} = 1.008Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

$$\tau_P = \frac{3\mu U_\infty}{2\delta} = \frac{3}{2} \frac{\rho\vartheta U_\infty}{4.64x(Re_x)^{-\frac{1}{2}}} = 0.323\rho U_\infty^2 \frac{\vartheta}{U_\infty x} \sqrt{\frac{U_\infty x}{\vartheta}} \rightarrow \frac{\tau_P}{\rho U_\infty^2} = 0.323Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

$$C_f = \frac{\tau_P}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} = 0.646Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

La force de frottement sur une longueur  $x$  de la paroi (par unité de largeur de cette paroi) :

$$F = \int_0^x \tau_P dx \times 1m = \int_0^x \left( \rho U_\infty^2 \frac{d\theta}{dx} \right) dx = \int_0^\theta \rho U_\infty^2 d\theta = \rho U_\infty^2 \theta$$

Le coefficient global de frottement :

$$C_F = \frac{1}{x} \int_0^x C_f dx = \frac{1}{x} \int_0^x \frac{\tau_P}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2} dx = \frac{F}{\frac{1}{2}\rho U_\infty^2 x} = 1.292Re_x^{-\frac{1}{2}}$$

## 2.7 Résumé des résultats de la couche limite laminaire pour différents profils de vitesse :

$\frac{u}{U_\infty} = f(Y)$ où $Y = \frac{y}{\delta}$	Blasius (exacts)	$2Y - Y^2$	$\frac{3}{2}Y - \frac{1}{2}Y^2$	$2Y - 2Y^3 + Y^4$	$\sin\left(\frac{\pi Y}{2}\right)$
$\tau_P \delta / \mu U_\infty$	-	2	3/2	2	$\pi/2$
$\delta Re_x^{\frac{1}{2}} / x$	-	5.477	4.641	5.836	4.789
$\delta^* Re_x^{\frac{1}{2}} / x$	1.721	1.826	1.740	1.752	1.741
$\theta Re_x^{\frac{1}{2}} / x$	0.664	0.730	0.646	0.686	0.654
$\delta_E Re_x^{\frac{1}{2}} / x$	-	1.148	1.008	1.078	1.019
$\tau_P Re_x^{\frac{1}{2}} / \frac{1}{2}\rho U_\infty^2$	0.664	0.730	0.646	0.686	0.654
$F Re_x^{\frac{1}{2}} / \frac{1}{2}\rho U_\infty^2 x$	1.328	1.460	1.292	1.372	1.310