I. Notions d'homotopie, algèbre homologique et (r)appels

Dans ce premier chapitre, nous donnons une vue d'ensemble rapide de la théorie de l'homotopie pour les espaces topologiques, de groupes d'homotopie et des concepts clés afférants, en particulier celui d'équivalence d'homotopie faible. En parallèle, nous donnerons également des bases d'algèbre homologique.

Commençons par préciser quelques
Conventions et notations.

(1) On désignera respectivement par **Top** la catégorie des espaces topologiques, dont les flèches sont les applications continues, et par $\mathbf{Top}_*$ celle des espaces topologiques pointés (dont les flèches sont les applications continues envoyant le point base de la source sur celui du but).
(2) On notera, pour tout anneau R, R-**Mod** la catégorie des R-modules (dont les flèches sont les applications R-linéaires) et $Ch(R)$ la catégorie des complexes de R-modules (cf 2.3 pour des notations précises).
(3) On notera I le segment compact $[0,1]$, $\mathbb{S}^n$ la sphère de dimension n.
(4) On notera **Cat** la catégorie (large) des catégories et **cat** la catégorie des petites catégories.
(5) Sauf mention du contraire un (co)produit (quelconque) d'espaces topologiques sera muni de la topologie (co)produit (cf. 6.1.3).
(6) Nous appelerons pullback un produit fibré et pushout un coproduit fibré dans toute catégorie (cf. 6.2) sans ressentir le besoin d'utiliser une terminologie française.

1.1. Homotopie entre fonctions, entre espaces

Définition 1.1.1. Deux applications continues $f_0, f_1 : X \to Y$ entre espaces topologiques sont dites homotopes s'il existe une application continue $F : X \times \underbrace{[0;1]}_{I} \to Y$ telle que $F\,|_{X\times\{0\}} = f_0$ et $F\,|_{X\times\{1\}} = f_1$.

Définition 1.1.2. Deux espaces topologiques X et Y sont dit homotopes s'il existe deux morphismes $f : X \to Y$ et $g : Y \to X$ tels que $f \circ g$ est homotope à id_Y et $g \circ f$ est homotope à id_X.

Notation 1.1.3. (1) Si deux morphismes $f_0, f_1 : X \to Y$ sont homotopes, on notera : $f_0 \simeq f_1$.
(2) Si deux espaces topologiques X et Y sont homotopes, on notera : $X \simeq Y$.
(3) Si deux espaces topologiques X et Y sont isomorphes (homéomorphes), on notera : $X \cong Y$.

La relation d'homotopie entre deux applications continues (et par suite entre espaces) est une relation d'équivalence. Par ailleurs, si $f \simeq g$ alors $p \circ f \circ q \simeq p \circ g \circ q$ pour toute paire d'applications continues p, q (telle que les composées existent bien sûr).

Exercice 1.1.4. Démontrer ces affirmations.

Définition 1.1.5. Un espace contractile est un espace homotope à un point.