Chapitre 1
Cinématique des fluides

1.1 Systèmes de référence :

Descriptions Eulérienne et Lagrangienne de l'écoulement :

L'ensemble des vitesses $\boldsymbol{V}$ des particules de fluide de position r à 1'instant t ($\boldsymbol{r} = \boldsymbol{OM}$), definit un champ de vecteurs $\boldsymbol{V}(r,t)$. Dans la description eulérienne du mouvement d'un fluide, on s'intéresse à la vitesse $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t)$ d'une particule de fluide qui coïncide à l'instant t avec le point fixe M de vecteur position $\boldsymbol{r}$; à chaque instant, on regarde donc les vitesses de particules différentes. À un instant ultérieur t', la vitesse au même point r sera devenue $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{r},t')$. Ce point de vue est celui d'un observateur au repos par rapport au référentiel dans lequel est mesurée la vitesse $\boldsymbol{V}$ et correspond aux études expérimentales réalisées avec des sondes fixes par rapport au mouvement du fluide. C'est la vitesse eulérienne que nous percevons lorsque nous regardons s'écouler une rivière du haut d'un pont : les particules de fluide qui défilent sous nos yeux sont différentes à chaque instant. Leur vitesse est fonction d'une part, de 1'instant d'observation et, d'autre part, du point $\boldsymbol{r}$ (fixe par rapport au pont) que nous observons. La description eulérienne présente cependant 1'inconvénient d'introduire des termes non linéaires dans 1'expression de 1'accélération. Dans la description lagrangienne, on suit une particule de fluide au cours de son mouvement, en spécifiant sa position $\boldsymbol{r_o}(\boldsymbol{r_o} = \boldsymbol{OM_o})$ a un instant référence donné t_o. La vitesse du fluide est alors caractérisée par le vecteur $\boldsymbol{V_{lag}}(\boldsymbol{r_o},t_o)$ qui est fonction des deux variables $\boldsymbol{r_o}$ et t_o. Dans la description imagée de la rivière qui s'écoule, ce point de vue est celui d'un observateur sur une barque entrainée par le courant : la vitesse de la barque représente la vitesse lagrangienne. Le point de vue lagrangien correspond à des mesures faites avec des instruments qui suivent le fluide dans son mouvement, tels que des ballons-sondes dans 1'atmosphère ou des particules marquées.

1.2 Principe de conservation de la masse :

1.2.1 Définition :

La masse d'une partie d'un système matériel que l'on suit dans son mouvement reste constante quand le temps varie. Ce principe est exprimé mathématiquement par l'équation de continuité.

1.2.2 Forme intégrale de l'équation de continuité :

Soit l'écoulement stationnaire d'un fluide dans un tube de courant. On considère un filet de courant de ce tube (Fig.1.1).

Durant un temps δt :

La masse δm_1 entrant par la surface dA_1= la masse δm_2 sortant par la surface dA_2.

$$\frac{\delta m_1}{\delta t} = \frac{\delta m_2}{\delta t}$$

$$\frac{\rho_1 dA_1 \delta x_1}{\delta t} = \frac{\rho_2 dA_2 \delta x_2}{\delta t}$$

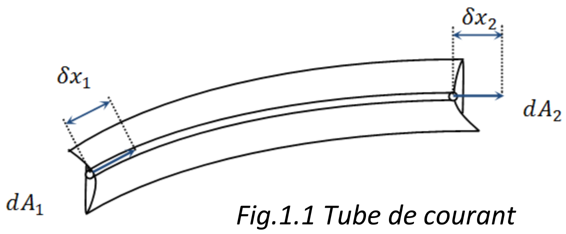


Fig.1.1 Tube de courant

Donc le bilan massique global à travers le tube est :

$$\int_{A_1} \rho_1 U_1 dA_1 = \int_{A_2} \rho_2 U_2 dA_2$$

Si à travers une section d'un tube ρ et U sont supposées constantes :

$$\rho_1 U_1 \int_{A_1} dA_1 = \rho_2 U_2 \int_{A_2} dA_2$$

$$\rho_1 U_1 A_1 = \rho_2 U_2 A_2 \tag{1.1}$$

1.2.3 Forme différentielle de l'équation de continuité :

Le taux d'accumulation de la masse à l'intérieur du volume

= le débit massique entrant − le débit massique sortant.

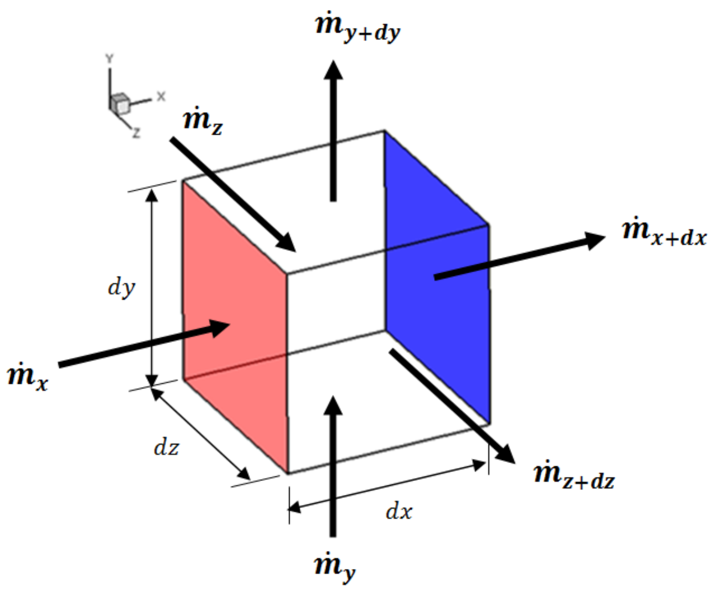
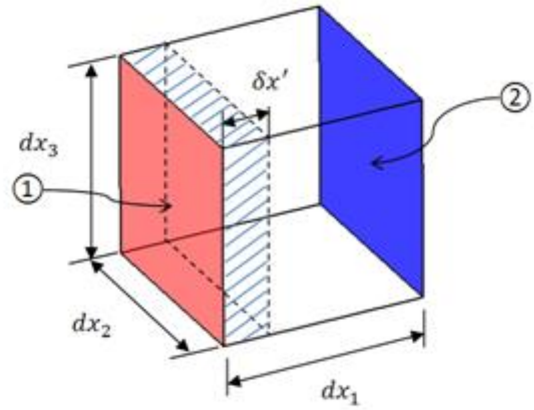


Fig.1.2 Volume de contrôle dans un champ d'écoulement

- **Rappel sur la notion du débit volumique et du débit massique:** Considérons, par exemple, une conduite dans laquelle circule un fluide. Le débit est la quantité de matière (exprimée par une masse ou un volume) qui passe à chaque unité de temps à travers la section de passage de la conduite. Si on choisit d'exprimer la quantité de matière, alors on parlera du débit massique (kg/s). Si on choisit un volume on parlera du débit volumique (m^3/s).



Le débit massique entrant par la face ①:

Durant le temps δt :

$$\frac{\rho.\delta\mathbb{V}}{\delta t} = \frac{\rho.\delta x'.dx_2.dx_3}{\delta t} = \rho.U_1.dx_2.dx_3$$

Le débit massique sortant par la face ②:

En utilise le développement de Taylor :

$$f(x+dx) = f(x) + dxf'(x) + \frac{(dx)^2}{2!}f''(x) + \cdots$$

En négligeant les termes (dx) d'ordre égal et supérieur de 2, on obtient :

$$f(x+dx) = f(x) + dxf'(x)$$

Donc,

Le débit massique sortant par la face ②$= \rho.U_1.dx_2.dx_3 + \frac{\partial}{\partial x_1}(\rho.U_1.dx_2.dx_3)dx_1$

Les débits massiques entrants par les faces ③ et ⑤ et sortants par les faces ④ et ⑥ sont obtenus de façon similaire.

La somme algébrique des débits entrants dans le volume (où sortants) = $-\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho.U_1.dx_2.dx_3)dx_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho.U_2.dx_1.dx_3)dx_2 - \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho.U_3.dx_1.dx_2)dx_3$

La masse dans le volume au temps t est : dm.

La masse dans le volume au temps $t+\delta t$ est : $dm + \frac{\partial}{\partial t}(dm)\delta t$.

Le taux d'accumulation de la masse à l'intérieur du volume est :

$$\frac{\frac{\partial}{\partial t}(dm)\delta t}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t}(dm) = \frac{\partial}{\partial t}(\rho . dx_1 . dx_2 . dx_3)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho . dx_1 . dx_2 . dx_3)$$
$$= -\frac{\partial}{\partial x_1}(\rho . U_1 . dx_2 . dx_3)dx_1 - \frac{\partial}{\partial x_2}(\rho . U_2 . dx_1 . dx_3)dx_2$$
$$- \frac{\partial}{\partial x_3}(\rho . U_3 . dx_1 . dx_2)dx_3$$

Les variables t, x_1, x_2, x_3 sont des variables indépendantes, donc on peut écrire :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(\rho U_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(\rho U_3)}{\partial x_3} = 0 \quad (1.2)$$

Cette dernière formule représente l'équation de continuité sous forme développée.

Sous forme vectorielle : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + div\ (\rho \boldsymbol{V}) = 0$ (1.3)

Sous forme tensorielle : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho U_i)}{\partial x_i} = 0$ (1.4)

Remarque :

- Si l'écoulement est permanant : $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
- Si le fluide est incompressible : $\frac{\partial U_i}{\partial x_i} = 0$

La forme différentielle de l'équation de continuité dans les coordonnées cylindriques s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial(r\rho V_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial(\rho V_\theta)}{\partial \theta} + \frac{\partial(\rho V_z)}{\partial z} = 0 \quad (1.5)$$

En coordonnées sphériques :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(\rho r^2 V_r) + \frac{1}{sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\rho V_\varphi sin\varphi\right) + \frac{1}{sin\varphi}\frac{\partial}{\partial \theta}(\rho V_\theta) = 0 \quad (1.6)$$

1.3 Ecoulements rotationnels et irrotationnels :

1.3.1 Introduction :

La théorie de l'écoulement idéal peut être étendue aux situations dans lesquelles la viscosité du fluide est très faible et les vitesses sont élevées, car elles correspondent à des valeurs très élevées du nombre de Reynolds, où les écoulements sont indépendants de la viscosité. Ainsi, on peut distinguer que l'écoulement idéal est comme celui qui corresponde à un nombre de Reynolds infiniment grand et à viscosité nulle. Les applications de la théorie de l'écoulement idéal se trouvent dans l'aérodynamique, dans l'accélération de l'écoulement, des marées et des vagues.

L'étude de l'écoulement idéal fournit des expressions mathématiques des lignes de courant dans les champs d'écoulement élémentaires ou de base. En combinant ces écoulements de base de diverses manières, il est possible d'obtenir des champs découlement complexes qui, dans de nombreux cas, ressemblent de façon remarquable aux situations réelles en dehors de la couche limite et tous les sillages associés.

Les considérations de l'écoulement idéal conduisent à une autre classification, à savoir la distinction entre l'écoulement rotationnel et irrotationnel.

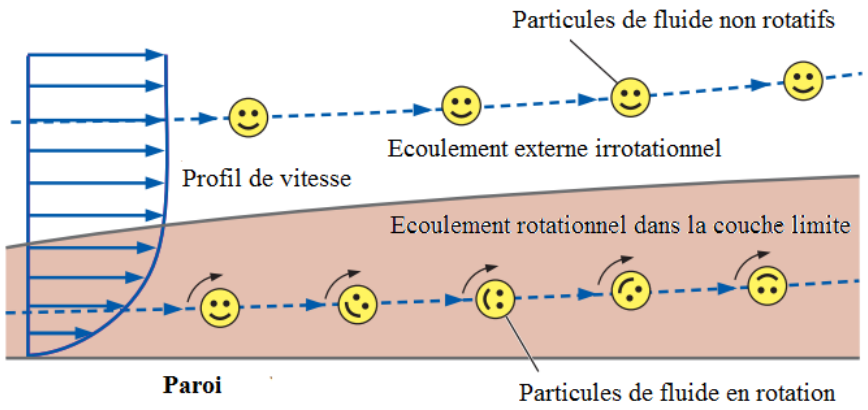


Fig.1.3 Différence entre l'écoulement rotationnel et irrotationnel.

En mécanique des fluides, comme en mécanique des solides, un élément peut subir quatre types fondamentaux de mouvement ou de déformation, comme illustré en deux dimensions dans la figure (1-4): (a) translation, (b) rotation, (c) déformation linéaire, et (d) déformation angulaire. L'étude de la dynamique des fluides est encore compliquée par le fait que les quatre types de mouvement ou de déformation se produisent généralement simultanément.

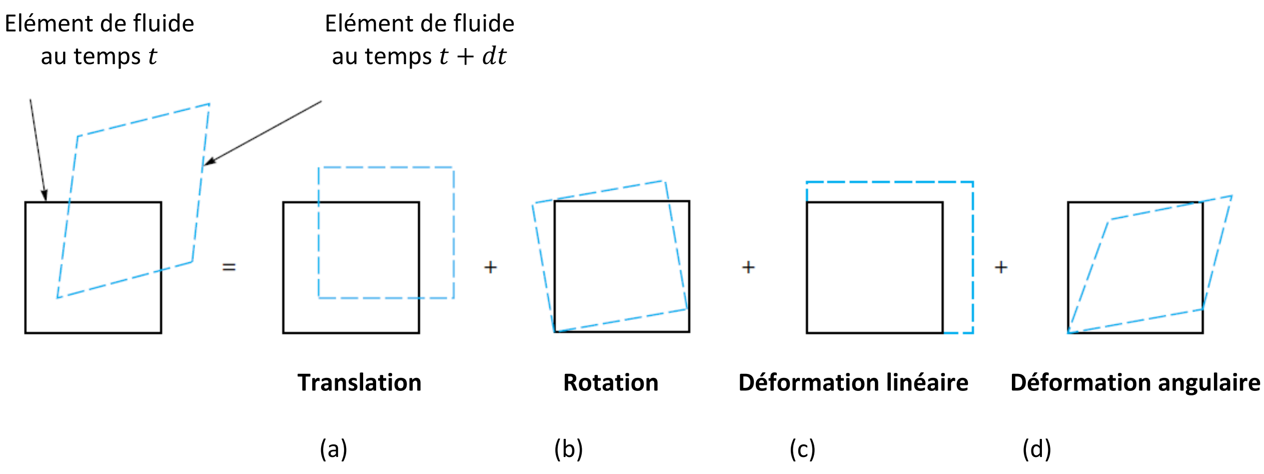


Fig.1.4 Types de mouvement et de déformation pour un élément fluide.

Considérons maintenant un mouvement d'un fluide dans lequel la rotation des éléments fluides est superposée à leur translation. Durant le temps dt, alors, le point A dans l'élément de fluide aAb se déplace vers A' et l'élément prend la position $a'A'b'$, comme représenté sur la figure (1.5).

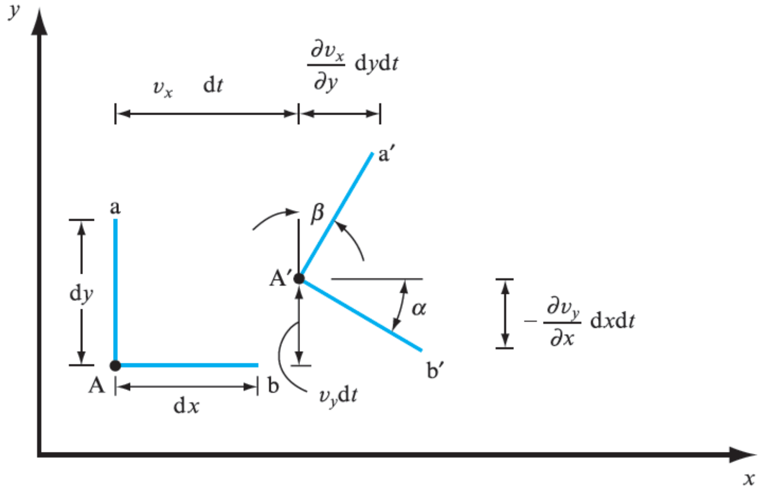


Fig.1.5 Rotation, translation et déformation d'un élément de fluide.

Les deux angles de rotation α et β ne seront pas les mêmes si la déformation a lieu et, par conséquent, la vitesse de rotation moyenne dans le temps dt sera :

$$w = \frac{\alpha + \beta}{2} \times \frac{1}{dt} = \frac{1}{2}\frac{(\alpha + \beta)}{dt}$$

Pour des petits angles ($tg\alpha = \alpha$) et en considérant que la rotation antihoraire étant positive :

$$\alpha = \frac{Arc}{Rayon} = \frac{\partial v_y}{\partial x} dxdt \frac{1}{dx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} dt$$

et

$$\beta = -\frac{\partial v_x}{\partial y} dydt \frac{1}{dy} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} dt$$

Par conséquent, la vitesse de rotation autour de l'axe z est :

$$w_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} dt - \frac{\partial v_x}{\partial y} dt\right)\frac{1}{dt} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)$$

Où :

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \xi \qquad (1.7)$$

ξ est la vorticité.

Où : w_z est la vitesse angulaire des éléments fluides autour de leur centre de masse dans le plan $x - y$. Dans l'écoulement tridimensionnel, w_z représente une des trois composantes de la vitesse angulaire w et la vorticité serait égale à $2w$.

$$\xi = 2w \tag{1.8}$$

S'il n'y a pas de rotation des éléments de fluide, l'expression (1.7) doit être égale à zéro donc la vorticité est nulle. Ainsi, si le mouvement des particules est purement translationnel, l'écoulement est irrotationnel et la condition qui doit être satisfaite est :

$$\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = 2w_z = 0 \tag{1.9}$$

Remarque :

La distinction entre l'écoulement rotationnel et irrotationnel est importante car, par exemple, l'équation de Bernoulli pour une ligne de courant s'applique à toutes les lignes de courant dans un champ d'écoulement sauf si l'écoulement est irrotationnel. En plus, la détermination des filets de courant ne peut être appliquée pratiquement qu'aux écoulements irrotationnels seulement.

1.3.2 Circulation et vorticité :

Considérons un élément fluide $ABCD$ en mouvement de rotation. Les composantes de vitesse le long des côtés de l'élément sont montrées sur la figure (1.6).

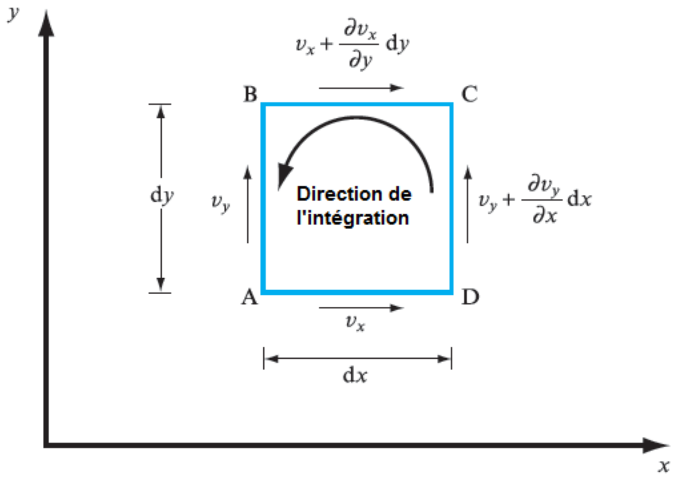


Fig.1.6 Circulation.

Puisque l'élément tournant fait partie d'un écoulement rotationnel, il doit y avoir une vitesse périphérique «résultante». Cependant, comme le centre de rotation n'est pas connu, il est convenable de relier la rotation à la somme des produits de la vitesse et de la distance autour du contour de l'élément. Une telle somme effectuée sur la ligne intégrale de la vitesse autour de l'élément est appelée circulation Γ :

$$\Gamma = \oint \boldsymbol{v_s}.\boldsymbol{ds} \tag{1.10}$$

La circulation est, par convention, considérée comme positive dans le sens anti-horaire d'intégration, par exemple, à partir du côté AD pour l'élément $ABCD$:

$$\Gamma_{ABCD} = v_x dx + \left(v_y + \frac{\partial v_y}{\partial x} dx\right) dy - \left(v_x + \frac{\partial v_x}{\partial y} dy\right) dx - v_y dy$$

$$= \frac{\partial v_y}{\partial x} dxdy - \frac{\partial v_x}{\partial y} dydx$$

$$= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right) dxdy$$

$$\Gamma_{ABCD} = \xi dxdy \qquad (1.11)$$

Pour un écoulement bidimensionnel dans le plan $x - y$, la circulation est exprimée par le produit de la vorticité de l'élément autour de l'axe z (ξ_z) et la surface de l'élément dA :

$$\Gamma_{ABCD} = \xi_z dA \qquad (1.12)$$

On constate, donc, que la circulation autour d'un contour est égale à la somme des vorticités dans la zone du contour. Ceci est connu sous le nom de théorème de Stokes et peut être énoncé mathématiquement, pour un cas général de tout contour C (Fig.1.7)

$$\Gamma_C = \oint v \cos\theta \, ds = \int_A \xi \, dA \qquad (1.13)$$

Fig.1.7 Circulation et vorticité.

Remarque :

Pour un écoulement irrotationnel, la vorticité est égale à zéro, ce qui indique que, la circulation autour d'un contour fermé par lequel le fluide s'écoule doit être égale à zéro.

1.3.3 Lignes de courant et fonctions de courant :

La ligne de courant est une ligne théorique dans l'espace, tangente aux vecteurs de vitesse à un instant donné. A partir de cette définition, il s'ensuit qu'il ne peut y avoir de l'écoulement à travers la ligne de courant, simplement parce qu'une ligne ne peut pas être tangentielle à un vecteur de vitesse et qui en même temps le croise.

Soit un écoulement incompressible bidimensionnel et permanant. La figure (1.8) montre les vecteurs de vitesse et de déplacement d'un fluide en un point, ainsi que leurs composantes orthogonales.

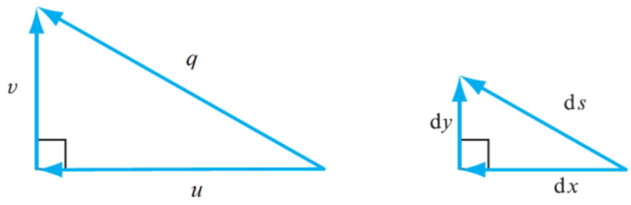


Fig.1.8 Composantes de vitesse et de déplacement.

Puisque, par définition, la ligne de courant : $\boldsymbol{ds} \parallel \boldsymbol{q}$, il s'ensuit que :

$$dy \parallel v \text{ et } dx \parallel u$$

Ainsi, le triangle de vitesse et le triangle de déplacement sont similaires et, par conséquent :

$$\frac{dy}{v} = \frac{dx}{u} \tag{1.14}$$

Cela constitue l'équation d'une ligne de courant.

Soit aa et bb deux lignes de courant dans un écoulement délimité par les limites solides AA et BB (Fig.1.9).

Si la ligne de courant aa est désignée par ψ_a, qui représente le débit par unité de profondeur entre AA et la ligne aa, alors :

$$\psi_a = Q_{Oc}$$

Et, de même, si :

$$\psi_b = Q_{Oe}$$

Il s'ensuit que :

$$d\psi = \psi_b - \psi_a = Q_{ce}$$

Pour que :

$$d\psi = udy - vdx \tag{1.15}$$

Et ψ, qui s'appelle la fonction de courant, est donné par :

$$\psi = \int udy - \int vdx \tag{1.16}$$

Ainsi, la fonction de courant dépend des coordonnées de la position :

$$\psi = f\,(x, y)$$

Et donc la dérivée totale:

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x}dx + \frac{\partial \psi}{\partial y}dy \tag{1.17}$$

En comparant les équations (1.15) et (1.17), les relations entre la fonction de courant et les composantes de vitesse sont obtenues:

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.18}$$

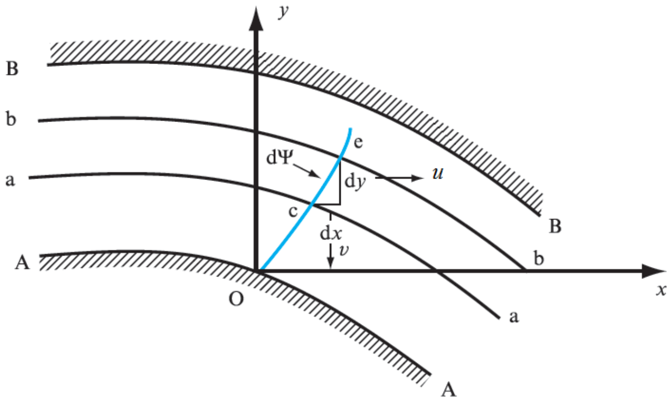


Fig.1.9 Fonction de courant.

Remarque:

- La convention de signe adoptée ici est que l'écoulement est positif de gauche à droite et le sens positif des ψ est vers le haut. Dans ce qui suit, on suppose que le sens positif des ψ est vers le bas :

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1.19}$$

- Le long d'une ligne courant $\psi = constante$:

  La ligne de courant est définie par : $\frac{dy}{v} = \frac{dx}{u} \rightarrow udy - vdx = 0$

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y}dy - \frac{\partial \psi}{\partial x}dx = 0 \rightarrow \frac{\partial \psi}{\partial y}dy + \frac{\partial \psi}{\partial x}dx = 0 = d\psi$$

  Donc, le changement le long de ligne de courant est nulle $d\psi = 0$.

1.3.4 Potentiel des vitesses :

Un écoulement est à potentiel des vitesses, s'il existe un champ scalaire $\phi(x, y, z)$ dans le domaine tel que :

$$\boldsymbol{q} = -grad\ \phi$$

Où bien :

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} \quad , \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} \quad , \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z} \tag{1.20}$$

Remarque :

- Le vecteur de vitesse est en tout point perpendiculaire à la ligne équipotentielle qui passe en ce point. Donc, les lignes de courant sont orthogonales aux lignes équipotentielles.
- Le sens de l'écoulement est celui du potentiel ϕ décroissant (Fig.1.10).
- La variation de ϕ est nulle le long d'une ligne équipotentielle ($\phi = const$).

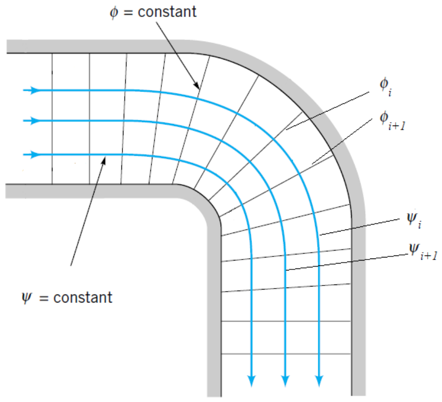


Fig.1.10 Ligne de courant et potentiel de vitesse d'un écoulement dans un coude à 90°.

1.3.5 Condition d'existence d'un écoulement 2D incompressible irrotationnel (à potentiel des vitesses :

Pour qu'un tel écoulement soit possible deux conditions doivent être satisfaites :

(i) La continuité :

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}=0 \tag{1.21}$$

(ii) La vorticité est nulle :

$$\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}=0 \tag{1.22}$$

La condition (i) est satisfaite automatiquement car :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)=0$$

La condition (ii) donne :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \psi}{\partial x}\right)-\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \psi}{\partial y}\right)=0$$

Où bien :

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}=0 \tag{1.23}$$

Toute fonction $\psi=f(x,y)$qui satisfait à l'équation de Laplace représente un écoulement à potentiel de vitesse ou irrotationnel.

- Equation de Laplace de ϕ :

Substituons les expressions de u et de v dans l'équation de continuité :

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial \phi}{\partial y}\right)=0$$

Où bien :

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = 0 \qquad (1.24)$$

Toute fonction $\phi = g(x, y)$ qui satisfait à l'équation de Laplace représente un écoulement à potentiel de vitesse.

1.3.6 Principe de superposition:

Si $\psi_1(x, y)$ satisfait à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} = 0$$

Si $\psi_2(x, y)$ satisfait à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} = 0$$

On peut écrire :

$$\alpha \left(\frac{\partial^2 \psi_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_1}{\partial y^2} \right) + \beta \left(\frac{\partial^2 \psi_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi_2}{\partial y^2} \right) = 0 \qquad (1.25)$$

Ou : α et β des constantes.

Et aussi :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2) = 0 \qquad (1.26)$$

L'équation de Laplace étant linéaire si ψ_1 et ψ_2 sont des solutions, alors $(\alpha\psi_1 + \beta\psi_2)$ est aussi une solution qui représente un écoulement à potentiel de vitesse (Fig.1.11).

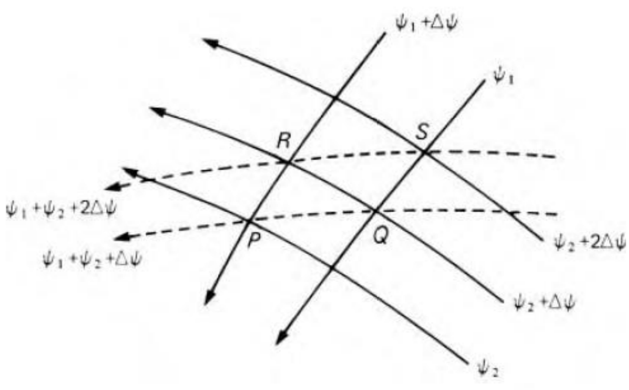


Fig.1.11 Combinaison de deux écoulements à potentiel de vitesse

Les composantes de vitesse du mouvement résultant sont données par les sommes algébriques de celles des mouvements constituants:

$$u_R = -\frac{\partial \psi_R}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial y}(\psi_A + \psi_B) = -\frac{\partial \psi_A}{\partial y} - \frac{\partial \psi_B}{\partial y} = u_A + u_B \qquad (1.27)$$

Et de même : $v_R = v_A + v_B$ (1.28)

1.4 Ecoulements de base :

1.4.1 Ecoulement uniforme :

L'écoulement est appelé uniforme si les lignes de courant sont toutes droites et parallèles et la magnitude de la vitesse est constante (Fig.1.12).

Les composantes du vecteur de vitesse $\boldsymbol{q}$ sont définies par :

$$u = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

$$v = \frac{\partial \psi}{\partial x} = -\frac{\partial \phi}{\partial y}$$

La fonction de courant est obtenue en intégrant ces 2 expressions :

$\psi = -\int u\,\partial y \;\; et \;\; \psi = \int v\,\partial x$

$\psi = -uy + f(x) \;\; et \;\; \psi = vx + g(y)$

$$\psi = -uy + vx + c \tag{1.29}$$

De même, le potentiel de vitesse est donné comme suit:

$$\phi = -ux - vy + d \tag{1.30}$$

Où : c et d sont des constantes

Si les lignes $\psi = 0$ et $\phi = 0$ passant par l'origine o, on a : $c = d = 0$

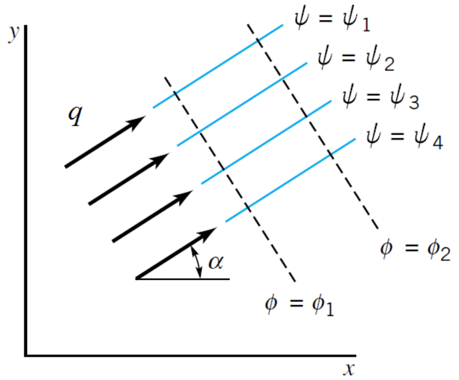


Fig.1.12 Ecoulement uniforme avec une vitesse constante q dans une direction arbitraire.

1.4.2 Source (où puits) de débit ṁ située à l'origine :

On appelle l'écoulement élémentaire à potentiel de vitesse qui s'effectue à partir d'un point (où vers un point) une source (où un puits).

pour la source : $\dot{m} > 0$, et pour le puits : $\dot{m} < 0$.

Considérons un fluide s'écoulant radialement vers l'extérieur à partir d'une ligne traversant l'origine perpendiculaire au plan $x - y$. Soit $\dot{m}$ le débit volumique de l'écoulement (par unité de longueur).

$$\dot{m} = v_r \times 2\pi r \qquad \text{Or :} \quad v_r = \frac{\dot{m}}{2\pi r}$$

En plus, l'écoulement est purement radial $v_\theta = 0$, la fonction de courant et le potentiel de vitesse correspondant (Fig.1.13) sont obtenues en intégrant les équations suivantes :

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = -\frac{\partial \phi}{\partial r} = \frac{\dot{m}}{2\pi r}$$

$$v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = 0$$

Donc :

$$\psi = -\frac{\dot{m}\theta}{2\pi} \tag{1.31}$$

$$\phi = -\frac{\dot{m}}{2\pi} ln\, r + f(\theta)$$

$$\phi = -\frac{\dot{m}}{2\pi} \ln r + c$$

$$\phi = -\frac{\dot{m}}{2\pi} \ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \tag{1.32}$$

$r = r_0$ étant la ligne $\phi = 0$.

Remarque : quand $r \to 0$: $\phi \to \infty$, on dit que le point de la source est un point singulier.

Par rapport au système cartésien :

$$\theta = tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \quad , \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Donc :

$$\psi = -\frac{\dot{m}}{2\pi} tg^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) \tag{1.33}$$

$$\phi = -\frac{\dot{m}}{2\pi} \ln\left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{r_0}\right) \tag{1.34}$$

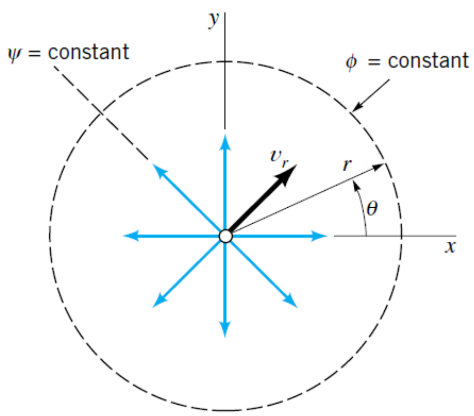


Fig.1.13 Lignes de courant et lignes équipotentielles pour une source.

1.4.3 Vortex

Nous considérons ensuite un champ d'écoulement dans lequel les lignes de courant sont des cercles concentriques dont le centre est à l'origine du repère ($v_r = 0$), c'est-à-dire que nous échangeons le potentiel de vitesse par la fonction de courant de la source (Fig.1.14).

La vorticité est nulle en tout point de l'élément fluide sauf le centre du vortex qui est un point singulier, donc la vitesse tangentielle est telle que :

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} - \frac{1}{r}\cancelto{0}{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}} = 0$$

$$\frac{\partial v_\theta}{\partial r} = -\frac{v_\theta}{r} \quad \therefore \quad \frac{dv_\theta}{v_\theta} = -\frac{dr}{r}$$

Après intégration :

$$\ln v_\theta = -\ln r + c \quad \therefore \quad \ln(r v_\theta) = c$$

$$v_\theta = \frac{B}{r} \tag{1.35}$$

où : B est une constante

La circulation d'un circuit circulaire dont le centre est l'origine est :

$$\Gamma = v_\theta 2\pi r \tag{1.36}$$

Or : $r v_\theta = c^{te}$ donc : $\Gamma = c^{te}$ est l'intensité du vortex.

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta} = v_r = 0 \quad \text{et} \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

$$\psi = -\int 0\, \partial\theta \quad \text{et} \quad \psi = \int \frac{\Gamma}{2\pi r} \partial r$$

$$\psi = f_1(r) \quad \text{et} \quad \psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + g_1(\theta)$$

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r + c = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \tag{1.37}$$

De même :

$$-\frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta} = v_\theta = \frac{\Gamma}{2\pi r} \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \phi}{\partial r} = v_r = 0$$

$$\phi = -\int \frac{\Gamma}{2\pi r} r \partial\theta \quad \text{et} \quad \phi = -\int 0\, \partial r$$

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta + f_2(r) \quad \text{et} \quad \phi = g_2(\theta)$$

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta + c_2 \tag{1.38}$$

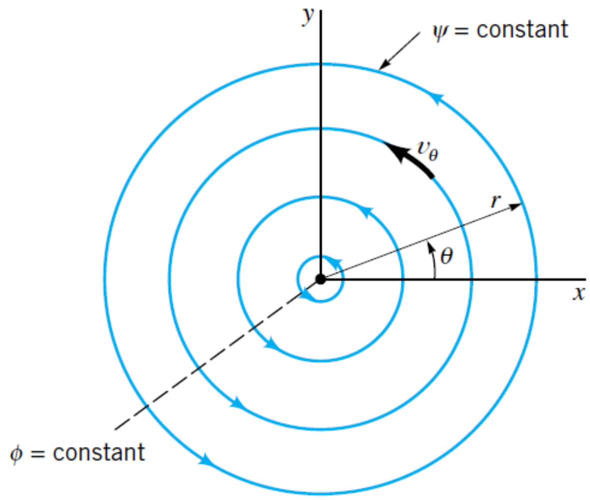


Fig.1.14 Lignes de courant et lignes équipotentielles pour un vortex.

1.4.4 Ecoulements potentiels superposés :

a) Source + écoulement uniforme : La fonction de courant résultante est :

$$\psi = \psi_{source} + \psi_{écoulement\ uniforme}$$

La source de débit $\dot{m}$ à l'origine :

$$\psi_1 = -\frac{\dot{m}\theta}{2\pi}$$

L'écoulement uniforme parallèle à ox :

$$\psi_2 = -Uy$$

La superposition des deux écoulements donne (Fig.1.15):

$$\psi = -U\,r\sin\theta - \frac{\dot{m}\theta}{2\pi} \tag{1.39}$$

En tout points :

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U\cos\theta + \frac{\dot{m}}{2\pi r}$$

$$v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\sin\theta$$

Points d'arrêt :

On appelle « point d'arrêt » un point en lequel la vitesse de l'écoulement est nulle.

Aux points d'arrêt : $v_r = 0$ et $v_\theta = 0$

$$v_\theta = 0 \rightarrow \sin\theta = 0 \rightarrow \begin{cases} \theta = 0 \\ \text{où} \\ \theta = \pi \end{cases}$$

$$v_r = \begin{cases} \theta = 0 \rightarrow U + \dfrac{\dot{m}}{2\pi r_s} = 0 & \text{(pas de solution)} \\ \theta = \pi \rightarrow -U + \dfrac{\dot{m}}{2\pi r_s} = 0 & \text{(1 solution)} \end{cases}$$

Donc :

$$r_s = \frac{\dot{m}}{2\pi U}$$

La valeur de la fonction de courant au point de stagnation est obtenue en remplaçant $r = r_s$ et $\theta = \pi$: $\psi_{stagnation} = -\frac{\dot{m}}{2} = -\pi r_s U$

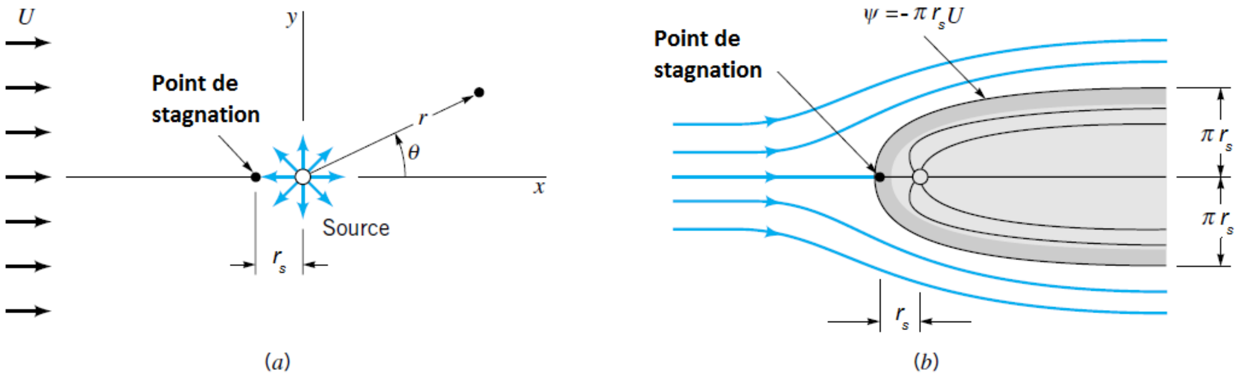


Fig.1.15 Superposition d'une source et d'un écoulement uniforme (a) et les lignes de courant résultantes (b).

Remarque : L'écoulement en amont de la ligne de courant $\psi = -\pi r_s U$ ne changerait pas si on place un corps en aval de cette ligne de courant (solide de Rankine).

b) Source + puits de même débit : La fonction de courant résultante est :

$$\psi = \psi_{source} + \psi_{puits}$$

Pour le point arbitraire P :

La source :

$$\psi_1 = -\frac{\dot{m}\theta_1}{2\pi}$$

Le puits :

$$\psi_2 = -\frac{(-\dot{m})\theta_2}{2\pi} = \frac{\dot{m}\theta_2}{2\pi}$$

La fonction de courant résultante :

$$\psi = -\frac{\dot{m}\theta_1}{2\pi} + \frac{\dot{m}\theta_2}{2\pi} = -\frac{\dot{m}}{2\pi}(\theta_1 - \theta_2) \qquad (1.40)$$

L'ensemble des points tel $\psi = c^{te}$ est un arc de cercle passant par A, P et B (Fig.1.16).

En coordonnées cartésiennes :

$$tg\,\gamma = tg(\theta_1 - \theta_2) = \frac{tg\theta_1 - tg\theta_2}{1 + tg\theta_1 . tg\theta_2} = \left(\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}\right) \Big/ \left(1 + \frac{y}{x-a} \times \frac{y}{x+a}\right)$$

$$tg\theta_1 = \frac{rsin\theta}{rcos\theta + a} \quad , \quad tg\theta_2 = \frac{rsin\theta}{rcos\theta - a}$$

$$tg\,\gamma = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

$$\psi = -\frac{\dot{m}\gamma}{2\pi} = -\frac{\dot{m}}{2\pi} tg^{-1}\left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right) \tag{1.41}$$

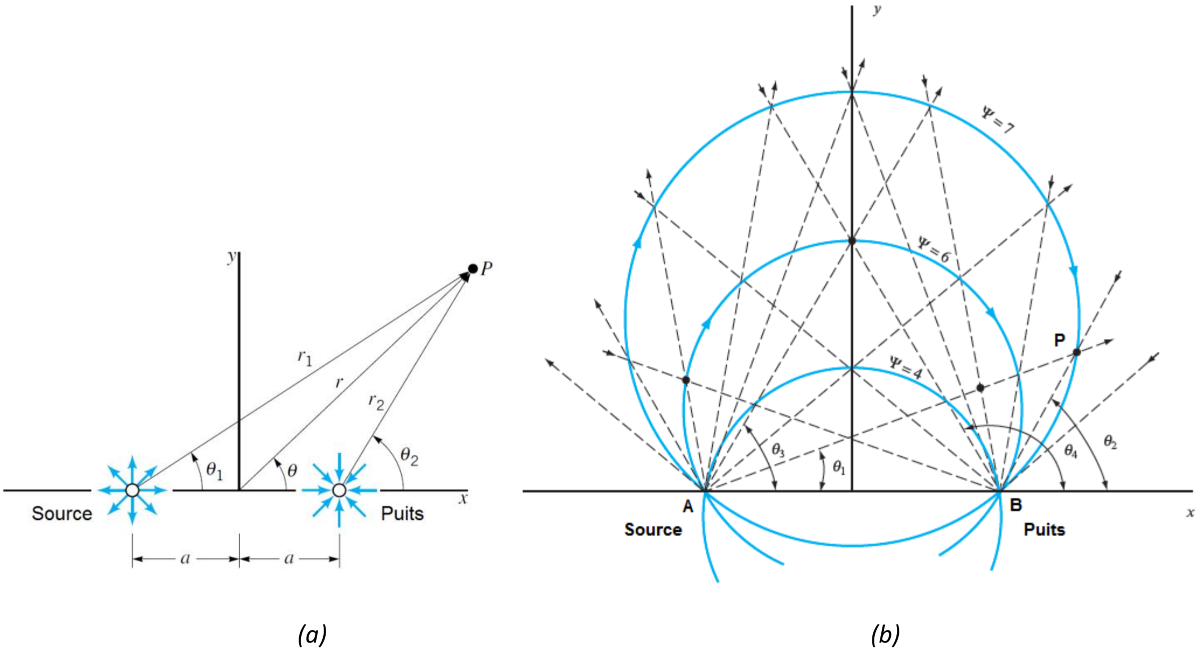


Fig.1.16 Superposition d'une source et d'un puits (a) et les lignes de courant résultantes (b).

c) *Doublet :*

Si dans le cas précédent (source + puits), $a \to 0$ et $\dot{m} \to \infty$ de façon que : $\dot{m}.a = c^{te}$, on obtient un doublet.

$\zeta = 2\dot{m}a$ est l'intensité du doublet.

$$\psi = -\frac{\dot{m}\gamma}{2\pi} \qquad \text{et} \qquad \text{tg}\,\gamma = \frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}$$

Quand $a \to 0$: $\gamma \to tg\,\gamma$ et $tg^{-1}\gamma \to \gamma$

Donc :

$$\psi = -\left(\frac{\dot{m}}{2\pi}\right)\left(\frac{2ay}{x^2 + y^2 - a^2}\right) = -\frac{\zeta y}{2\pi(x^2 + y^2)}$$

$$\psi = -\frac{\zeta r sin\theta}{2\pi r^2} = -\frac{\zeta sin\theta}{2\pi r} \tag{1.42}$$

Considérons l'ensemble de points tel que $\psi = c^{te}$ où $\frac{y}{x^2+y^2} = c^{te} = A$:

$$x^2 + y^2 - \frac{y}{A} = 0 \qquad \text{où} \qquad A = -\frac{2\pi\psi}{\zeta}$$

$$(x-0)^2 + \left(y - \frac{1}{2A}\right)^2 = \frac{1}{4A^2}$$

C'est l'équation d'un cercle de centre $\left(0\,,\ \frac{1}{2A}\right)$ et de rayon $\left|\frac{1}{2A}\right|$ (Fig.1.17).

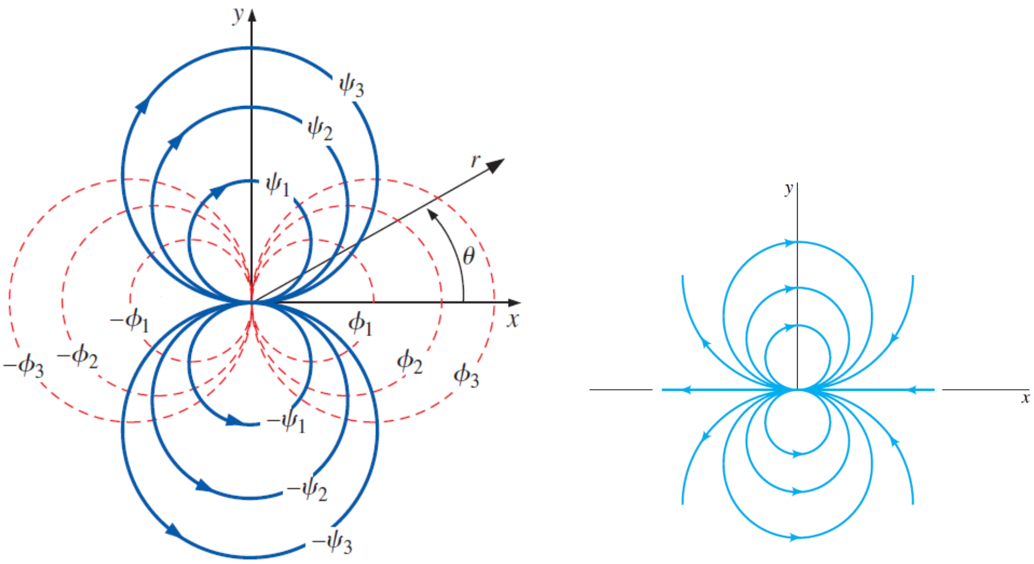


Fig.1.18 Lignes de courant et les lignes équipotentielles pour un doublet.

d) Source + puits de même débit + écoulement uniforme : La fonction de courant résultante est : $\psi = \psi_{source} + \psi_{puits} + \psi_{écoulement\,uniforme}$

La fonction de courant résultante est :

$$\psi = -\frac{\dot{m}}{2\pi}\mathrm{tg}^{-1}\left(\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}\right) - Uy \tag{1.43}$$

Points d'arrêts sur l'axe des x :

Sur l'axe x, les vitesses de l'écoulement uniforme, de la source et du puits sont toutes parallèles par rapport à cet axe, donc la résultante doit être parallèle à l'axe x.

Si s est un point d'arrêt sur l'axe ox :

$$U + \frac{\dot{m}}{2\pi(r_s - a)} - \frac{\dot{m}}{2\pi(r_s + a)} = 0$$

$$-\frac{2\pi U}{\dot{m}} = \frac{1}{(r_s - a)} - \frac{1}{(r_s + a)} = \frac{2a}{{r_s}^2 - a^2}$$

$${r_s}^2 = a^2 - \frac{\dot{m}a}{\pi U} \qquad \therefore \qquad r_s = \pm a\sqrt{1 - \frac{\dot{m}}{\pi U a}}$$

On a trois cas possible :

- $\frac{\dot{m}}{\pi U a} > 1 \rightarrow$ pas de point d'arrêt.

- $0 < \frac{\dot{m}}{\pi U a} < 1 \rightarrow r_s < a$ (deux points d'arrêt ne sont pas présentés ici)
- $\frac{\dot{m}}{\pi U a} < 0 \rightarrow r_s > a$ (deux points d'arrêt).

Les courbes correspondantes pour ce champ d'écoulement sont obtenues en définissant $\psi = C^{te}$. Si plusieurs de ces courbes sont tracées, on verra que la ligne de courant $\psi = 0$ forme un corps fermé tel qu'illustré sur la figure (1.18). Cette ligne de courant forme la surface d'un corps de longueur $2r_s$ et de largeur $2h$ placé dans un écoulement uniforme. Les lignes de courant à l'intérieur du corps ne présentent aucun intérêt pratique et ne sont pas représentées. Ce corps a une forme ovale appelé l'ovale de Rankine.

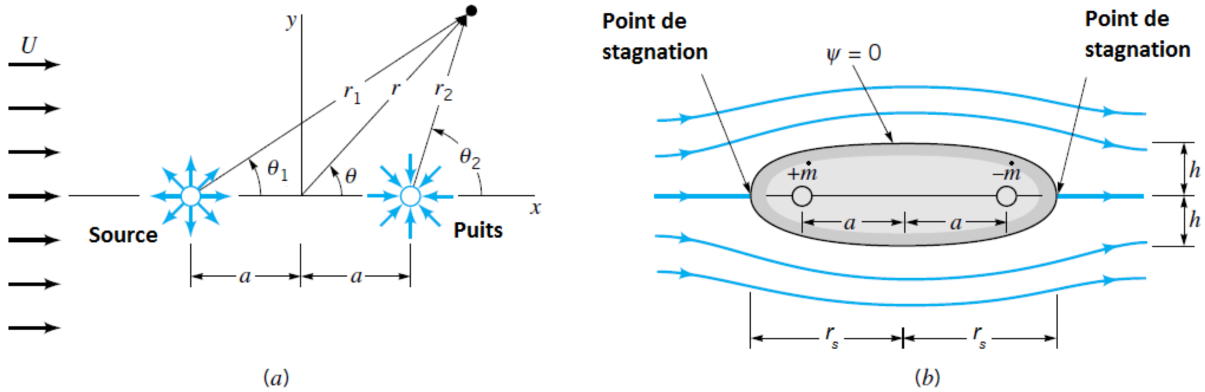


Fig.1.18 Superposition d'une source, d'un puits et d'un écoulement uniforme (a) et les lignes de courant résultantes (b).

e) Doublet + écoulement uniforme : La fonction de courant résultante est :

$$\psi = \psi_{doublet} + \psi_{écoulement\ uniforme}$$

$$\psi = -\frac{\zeta sin\theta}{2\pi r} - U\,r\sin\theta = -sin\theta\left(rU + \frac{\zeta}{2\pi r}\right) \tag{1.44}$$

On a un cas important si $\frac{\zeta}{U} < 0$:

La ligne de courant $\psi = 0$ est telle que :

$$0 = -sin\theta\left(rU + \frac{\zeta}{2\pi r}\right)$$

- $sin\theta = 0 \rightarrow \theta = 0$ où π quelque soit le rayon r et donc l'axe des x est une ligne de courant $\psi = 0$.
- Où bien :

$$rU + \frac{\zeta}{2\pi r} = 0 \quad \therefore \quad r = \sqrt{\frac{-\zeta}{2\pi U}} = r_0 = C^{te} \text{ quelque soit l'angle } \theta$$

Le cercle de rayon r_0 est une ligne de courant $\psi = 0$ (Fig.1.19).

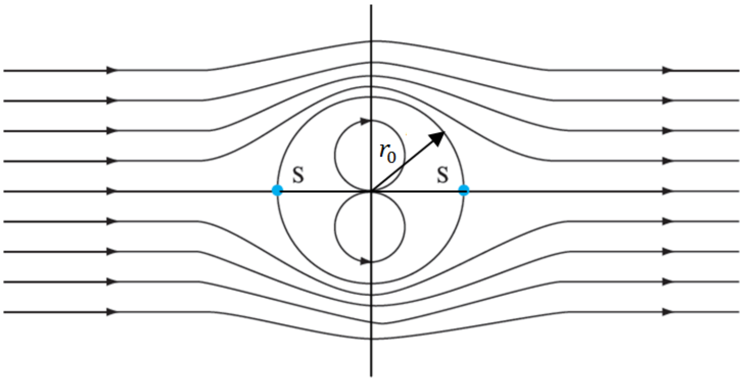


Fig.1.19 Lignes de courant de la superposition d'un doublet et d'un écoulement uniforme.

Remarque :

$$\psi = -sin\theta\left(rU + \frac{\zeta}{2\pi r}\right) = -sin\theta\left(rU - \frac{{r_0}^2\, U}{r}\right) = -rUsin\theta\left(1 - \frac{{r_0}^2}{r^2}\right) \qquad (1.45)$$

L'écoulement à l'extérieur du cercle de rayon r_0 peut représenter l'écoulement uniforme autour d'un cylindre solide à section circulaire.

f) Doublet + écoulement uniforme+ vortex libre :

- Pour un Doublet+ écoulement uniforme **:**

$$\psi_1 = -rUsin\theta\left(1 - \frac{{r_0}^2}{r^2}\right)$$

- Pour un vortex libre :

$$\psi_2 = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right)$$

La fonction résultante est : $\psi = \psi_1 + \psi_2$

$$\psi = -rUsin\theta\left(1 - \frac{{r_0}^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi}\ln\left(\frac{r}{r_0}\right) \qquad (1.46)$$

Les vitesses sont déterminées par :

$$v_r = -\frac{1}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = U\cos\theta\left(1 - \frac{{r_0}^2}{r^2}\right)$$

$$v_\theta = \frac{\partial\psi}{\partial r} = -U\sin\theta\left(1 + \frac{{r_0}^2}{r^2}\right) + \frac{\Gamma}{2\pi r}$$

Points d'arrêt :

Aux points d'arrêt : $v_r = 0$ et $v_\theta = 0$

$$v_r = 0 \rightarrow \begin{cases} r = r_0 & (i) \\ \cos\theta = 0 & (ii) \end{cases}$$

$(\boldsymbol{i})$ Sur la surface du cylindre: $r = r_0$:

$$v_{\theta}|_{r=r_0} = -2U\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi r_0} = 0 \quad \rightarrow \quad \sin\theta_{stag} = \frac{\Gamma}{4\pi r_0 U}$$

- Pour $\Gamma = 0 \rightarrow \sin\theta_{stag} = 0 \rightarrow \begin{cases}\theta_{stag} = 0 \\ \theta_{stag} = \pi\end{cases}$ → Il existe deux points de stagnation (Fig.1.20a)
- Pour : $-1 \leq \frac{\Gamma}{4\pi r_0 U} \leq 1$ → Il existe deux points de stagnation (Fig.1.20b)

Sauf pour le cas : $\frac{\Gamma}{4\pi r_0 U} = 1$, les deux points se confondent en un point unique (Fig.1.20c)

$(\boldsymbol{ii})$ Sur l'axe des y: $\cos\theta = 0 \rightarrow \begin{cases}\theta = \dfrac{\pi}{2} \\ \theta = \dfrac{3\pi}{2}\end{cases}$

- Pour : $\frac{\Gamma}{4\pi r_0 U} > 1$, un point de stagnation sur l'axe des y en dehors du cylindre (Fig.1.20d).

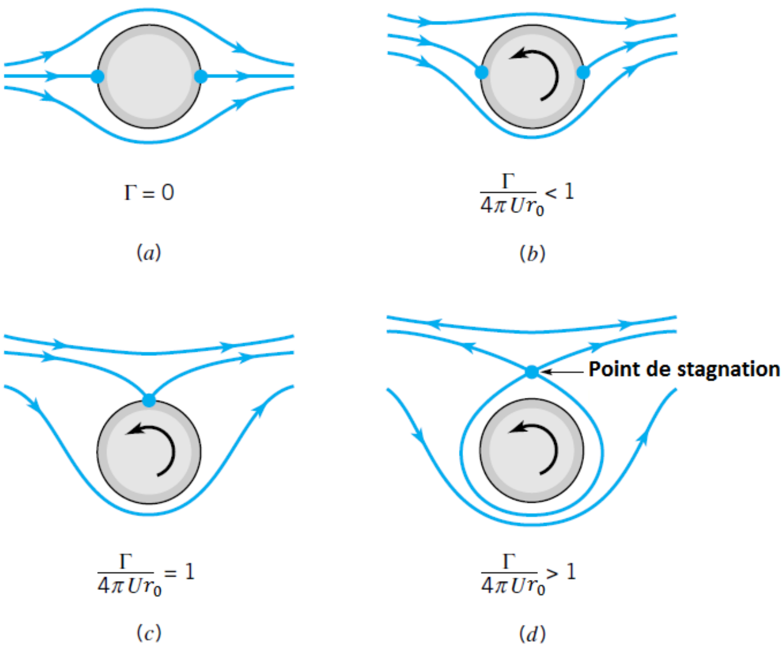


Fig.1.20 Lignes de courant de la superposition d'un doublet et d'un écoulement uniforme.

- ***Effet Magnus (la force de portance sur un cylindre en rotation) :***

La force qu'exerce le fluide sur le cylindre est perpendiculaire à 1'axe et possède deux composantes : 1'une, dans la direction de la vitesse U et de sens opposé est la trainée, 1'autre dans la direction perpendiculaire est la portance (Fig.1.21). Pour déterminer les composantes de cette force, on calcule la résultante des forces de pression sur le cylindre à partir du champ de pression $p(r = r_0, \theta)$ à sa surface. La pression vérifie la relation de Bernoulli et elle s'applique en effet à tout 1'espace, car 1'écoulement est potentiel. En prenant comme référence un point à

1'infini (pression p_0, vitesse U) et en négligeant la différence en énergie potentielle, nous obtenons l'équation de Bernoulli sur la ligne de courant circulaire (paroi du cylindre):

$$p(r = r_0, \theta) + \frac{1}{2}\rho {v_\theta}^2(r = r_0, \theta) = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2$$

d'où :

$$p = p_0 + \frac{1}{2}\rho U^2 \left[1 - \left(-2\sin\theta + \frac{\Gamma}{2\pi U r_0}\right)^2\right] \qquad (1.47)$$

La portance par unité de longueur du cylindre est donnée par la composante F_p de la résultante des forces de pression suivant la direction y :

$$F_p = -\int_{surface\ du\ cylindre} p\sin\theta\, r_0 d\theta$$

$$F_p = -\int_0^{2\pi} p\sin\theta\, r_0 d\theta$$

$$F_p = -\int_0^{2\pi} \frac{\rho U \Gamma}{\pi} \sin^2\theta\, d\theta = -\rho U \Gamma \quad \text{par mètre de long du cylindre} \qquad (1.48)$$

(ainsi, F_p est dirigée vers le haut). Cette expression de la portance (appelée force de Magnus).

Par ailleurs, la composante F_t suivant 1'axe des x de la résultante des forces de pression (la trainée) est nulle. En effet, la norme de la vitesse en des points symétriques par rapport a 1'axe des y est la même ; il en est donne de même de la pression. II en résulte que les contributions en projection sur 1'axe des x s'annulent deux à deux. Ce résultat s'applique à tous les écoulements stationnaires de fluides parfaits autour d'un obstacle : dans ce cas, la trainée est nulle car il n'existe pas de mécanisme de dissipation visqueuse.

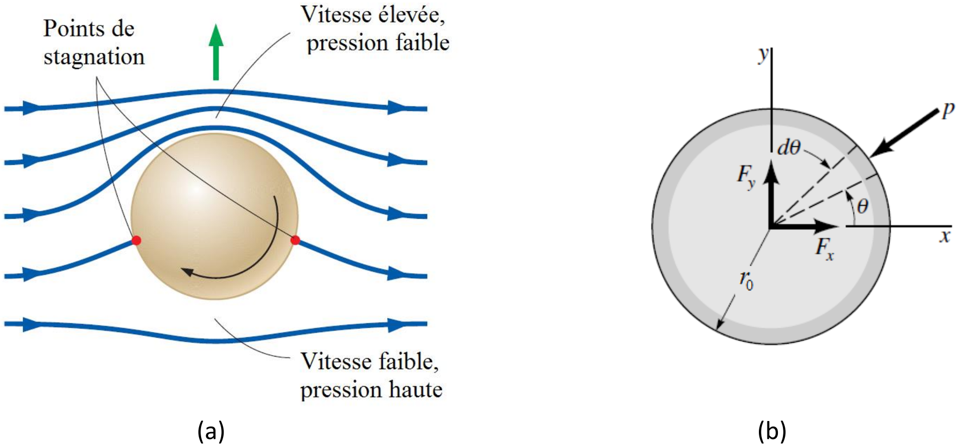


Fig.1.22 Ecoulement potentiel sur un cylindre rotatif (a) et l'effet Magnus résultant (b).

1.5 Éléments de la théorie potentielle complexe :

1.5.1 Définition du potentiel complexe :

On peut définir dans le plan complexe une fonction potentiel complexe $f(z)$, telle que :

$$f(z) = \phi(x, y) + i\psi(x, y) \tag{1.49}$$

Les potentiels conjugués ϕ et ψ obéissent aux relations de Cauchy définies par les relations suivantes :

$$u = -\frac{\partial \phi}{\partial x} = -\frac{\partial \psi}{\partial y}$$

$$v = -\frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}$$

La fonction $f(z)$ est une fonction analytique qui ne dépend que de la variable complexe $z = x + iy$. Considérons la fonction dérivée, appelée vitesse complexe:

$$w(z) = \frac{df}{dz} = u - iv \tag{1.50}$$

1.5.2 Potentiel complexe de quelques écoulements :

On peut faire correspondre les potentiels complexes étudiés précédemment aux écoulements plans suivants :

a) Ecoulement uniforme :

$$f(z) = -Uz \tag{1.51}$$

Alors :

$$\frac{df}{dz} = -U = -u + iv$$

D'où : $u = U$ et $v = 0$, alors l'équation (1.51) représente un écoulement uniforme parallèle à l'axe x.

Si on considère :

$$f(z) = -iVz \tag{1.52}$$

Alors :

$$\frac{df}{dz} = -iV = -u + iv$$

D'où : $u = 0$ et $v = V$, alors l'équation (1.51) représente un écoulement uniforme parallèle à l'axe y.

D’une façon générale, on décrit un écoulement uniforme dans une direction quelconque α (par rapport à l’axe x) du plan :

$$f(z) = -qze^{-i\alpha} = z(-q\cos\alpha + iq\sin\alpha) \tag{1.53}$$

Où :

$u = q\cos\alpha$ et $v = q\sin\alpha$

b) Source :

$$f(z) = -\frac{\dot{m}}{2\pi}\ln z = -\frac{\dot{m}}{2\pi}\ln\left(re^{-i\theta}\right) = -\frac{\dot{m}}{2\pi}\ln r - i\frac{\dot{m}}{2\pi}\theta \tag{1.54}$$

Où : le potentiel ϕ et la fonction de courant ψ sont telles que :

$$\phi = -\frac{\dot{m}}{2\pi}\ln r$$

$$\psi = -\frac{\dot{m}}{2\pi}\theta$$

c) Vortex libre :

$$f(z) = -i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln z = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta + i\frac{\Gamma}{2\pi}\ln r \tag{1.55}$$

Où : le potentiel ϕ et la fonction de courant ψ sont telles que :

$$\phi = -\frac{\Gamma}{2\pi}\theta$$

$$\psi = \frac{\Gamma}{2\pi}\ln r$$

d) Doublet :

$$f(z) = -U\frac{a^2}{z} = -U\frac{a^2}{x+iy} = -U\frac{a^2}{x^2+y^2}\,(x-iy) \tag{1.56}$$

Où : le potentiel ϕ et la fonction de courant ψ sont telles que :

$$\phi = -U\frac{a^2 x}{x^2+y^2} = -U\frac{a^2}{r}\cos\theta$$

$$\psi = U\frac{a^2 y}{x^2+y^2} = U\frac{a^2}{r}\sin\theta$$

e) Ecoulement uniforme autour d'un cylindre :

On considère dans ce cas, la combinaison des potentiels complexes d'un écoulement uniforme parallèlement à l'axe des x et d'un doublet.

$$f(z) = -Uz - U\frac{a^2}{z} \tag{1.57}$$

Le potentiel ϕ et la fonction de courant ψ sont exprimés comme suit :

$$\phi = -Ux - U\frac{a^2 x}{x^2+y^2} = -Ux - U\frac{a^2}{r}\cos\theta$$

$$\psi = -Uy + U\frac{a^2 y}{x^2+y^2} = -Uy + U\frac{a^2}{r}\sin\theta$$

La ligne de courant $\psi = 0$ est composée de la ligne droite $y = 0$ et le cercle défini par : $x^2 + y^2 = a^2$.