2. Équations aux différences linéaires

2.1 Définitions et résultats généraux

Définition 2.1.1 Une équation de la forme

$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = g(n) \tag{2.1}$$

avec, $p_0(n) = 1, p_1(n), p_2(n), \ldots, g(n)$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{N}_{n_0}$, s'appelle ***équation aux différences linéaire*** d'ordre k dés que $p_k(n) \neq 0$.

R En générale on associe k conditions initiales avec l'équation (2.1)

$$x_{n_0} = c_1, x_{n_0+1} = c_2, \ldots, x_{n_0+k-1} = c_k, \tag{2.2}$$

avec c_i, $i = 1, \ldots, k$ sont des constantes réelles ou complexes.

R On a les notations suivants

- $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.
- $\mathbb{N}_0 = \{0\} \cup \mathbb{N}$.
- $\mathbb{N}_{n_0} = \{n \geq n_0, n \textit{ entier}\}$.

■ Example 2.1

1. L'équation

$$x_{n+4} - n^2 x_{n+2} + \frac{n^2+1}{n} x_{n+1} - 5x_n = 2n^2$$

est une équation aux différences linéaire d'ordre 4 .

2. L'équation

$$x_{n+2} = 2^n x_{n+1} + x_n - e^{-n}$$

est une équation aux différences linéaire d'ordre 2 .

3. L'équation
$$x_{n+1} = \frac{1}{x_n + x_{n-1}}$$
est une équation aux différences non linéaire .

■

■ **Example 2.2** On consédère l'équation aux differnces linéaire d'ordre 3
$$x_{n+3} - \frac{n}{n+1}x_{n+2} + nx_{n+1} - 3x_n = n \tag{2.3}$$
où $x_1 = 0, x_2 = -1$ et $x_3 = 1$. Trouver les terms x_4, x_5, x_6 et x_7.
On écrit (2.3) sous la forme
$$x_{n+3} = \frac{n}{n+1}x_{n+2} - nx_{n+1} + 3x_n + n \tag{2.4}$$
On pose $n = 1$ dans (2.4), On a
$$x_4 = \frac{1}{2}x_3 - x_2 + 3x_1 + 1 = \frac{5}{2}.$$
Pour $n = 2$,
$$x_5 = \frac{2}{3}x_4 - 2x_3 + 3x_2 + 2 = -\frac{4}{3}.$$
Pour $n = 3$
$$x_6 = \frac{3}{4}x_5 - 3x_4 + 3x_3 + 3 = -\frac{2}{3}.$$
Pour $n = 4$
$$x_7 = \frac{4}{5}x_6 - 4x_5 + 3x_4 + 4 = 20.9.$$

■

Définition 2.1.2 L'équation aux différences (2.1) avec $g(n) = 0$, $\forall n \geq n_0$ est dite équation aux différences linéaire ***homogène*** et elle s'écrit comme suit
$$x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = 0. \tag{2.5}$$

■ **Example 2.3**
1. L'équation
$$x_{n+3} - e^n x_{n+2} + \frac{n^2+1}{n+1}x_{n+1} - x_n = 0.$$
est une équation aux différences linéaire homogène d'ordre 3 .
2. L'équation
$$x_{n+2} = \frac{2^n}{n+3}x_{n+1} + x_n - logn$$
est une équation aux différences linéaire non homogène d'ordre 2.

■

Définition 2.1.3 Une suite $\{x_n\}_{n \geq n_0}$ est dite ***solution*** de l'équation (2.1) avec les conditions initiales (2.2) si elle satisfait la relation (2.1).

Théorème 2.1.1 L'équation (2.1) avec les conditions initiales (2.2) admet une et une seul solution.

Proof. Soit $\{x_n\}_{n\geq n_0}$ une solution de l'équation (2.1) avec les conditions initilaes (2.2), alors

$$x_{n+k} = -p_1(n)x_{n+k-1} - \ldots - p_k(n)x_n + g(n)$$

et

$$x_{n_0} = c_1, x_{n_0+1} = c_2, \ldots, x_{n_0+k-1} = c_k,$$

Supposons que $\{\widetilde{x}_n\}_{n\geq n_0}$ une autre solution de l'équation (2.1) avec les conditions initilaes (2.2), alors

$$\widetilde{x}_{n_0} = c_1, \widetilde{x}_{n_0+1} = c_2, \ldots, \widetilde{x}_{n_0+k-1} = c_k,$$

donc

$$x_n = \widetilde{x}_n, \quad pour\ n =_0, n_0+1, \ldots, n_0+k-1.$$

Et comme

$$\widetilde{x}_{n+k} = -p_1(n)\widetilde{x}_{n+k-1} - \ldots - p_k(n)\widetilde{x}_n + g(n)$$

on obtient que

$$x_n = \widetilde{x}_n, \quad pour\ n \geq n_0+k.$$

Alors

$$x_n = \widetilde{x}_n, \quad pour\ n \geq n_0.$$

Par conséquent on a l'unisité de solution de l'équation (2.1) avec les conditions initiales (2.2). ■

Théorème 2.1.2 L'ensemmble S des solutions de l'équation aux différences (2.5) est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$ de dimension k.

Proof. Soit $S = \{x = (x_n)_{x\geq n_0}, x_i \in \mathbb{K} : x_{n+k} + p_1(n)x_{n+k-1} + \ldots + p_k(n)x_n = 0.\}$ l'ensemble de toutes les solutions de l'équation aux différences (2.5). On a

$$S \subset \mathbb{K}^{\mathbb{N}} = \{(u_0, u_1, \cdots, u_n, \cdots),\ u_i \in \mathbb{K}\}.$$

Sur l'espace vectoriel $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, on a les deux opérations "+" et "." définies par
- $(x_n)_{n\geq n_0} + (y_n)_{n\geq n_0} = (x_n + y_n)_{n\geq n_0}$,
- $\lambda.(x_n)_{n\geq n_0} = (\lambda x_n)_{n\geq n_0}$, $\lambda \in \mathbb{K}$.

$S \neq \phi$ car la suite à éléments tous nuls satisfait l'équation (2.5).
Soient $(x_n)_{n\geq n_0}, (y_n)_{n\geq n_0} \in S$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$, on a

$$\begin{aligned}
\alpha x_{n+k} + \beta y_{n+k} &= \alpha(-p_1(n)x_{n+k-1} - p_2(n)x_{n+k-2} - \ldots - p_k(n)x_n) \\
&+ \beta(-p_1(n)y_{n+k-1} - p_2(n)y_{n+k-2} - \ldots - p_k(n)y_n) \\
&= -p_1(n)(\alpha x_{n+k-1} + \beta y_{n+k-1}) - p_2(n)(\alpha x_{n+k-2} + \beta y_{n+k-2}) - \ldots - p_k(n)(\alpha x_n + \beta y_n).
\end{aligned}$$

Donc $\alpha(x_n)_{n\geq n_0} + \beta(y_n)_{n\geq n_0} \in S$. Rest à montrer $quedim(S) = k$, pour cela on va montrer que S est isomorphe au sous espace vectoriel de $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, $\mathbb{K}^k$ définit par

$$\mathbb{K}^k = \{(v_0, v_1 v \ldots, v_{k-1}), v_i \in \mathbb{K}\},$$

posons

$$\begin{aligned}
\varphi:\ & S \longrightarrow \mathbb{K}^k \\
& x \longmapsto \varphi(x) = (x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_0+k-1})
\end{aligned}$$

Il est claire que φ est une application bien définie, montrons qu'elle est linéaire:
Soit $x, y \in S$, et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha x+\beta y) &= (\alpha x_{n_0}+\beta y_{n_0}, \alpha x_{n_0+1}+\beta y_{n_0+1}, \ldots, \alpha x_{n_0+k-1}+\beta y_{n_0+k-1}) \\
&= \alpha(x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_0+k-1})+\beta(y_{n_0}, y_{n_0+1}, \ldots, y_{n_0+k-1}) \\
&= \alpha\varphi(x)+\beta\varphi(y).
\end{aligned}$$

Donc φ est un homomorphisme d'espaces vectoriel.
On va montrer que φ est bijectif, commençons par l'injectivité. On a

$$\begin{aligned}
ker(\varphi) &= \{x \in S : \varphi(x) = 0_{\mathbb{K}^k}\} \\
&= \{x \in S : (x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots, x_{n_0+k-1}) = (0, 0, \ldots, 0)\} \\
&= \{x \in S : x_{n_0} = 0, x_{n_0+1} = 0, \ldots, x_{n_0+k-1} = 0\}
\end{aligned}$$

et comme les $x_n, n \geq n_0+k$ s'écrivent au fonction de $x_{n_0+k-1}, x_{n_0+k-2}, \ldots, x_{n_0}$, alors

$$\begin{aligned}
ker(\varphi) &= \{x \in S : x_n = 0, \forall n \geq n_0\} \\
&= \{(0, 0, \ldots, 0)\} \\
&= \{0_{\mathbb{K}^k}\}
\end{aligned}$$

d'où φ est injectif.
On va montrer que φ est surjectif. Soit $(c_1, c_2, \ldots, c_k) \in \mathbb{K}^k$, définissons la suite $(x_n)_{n \geq n_0} \in S$

$$x_{n_0} = c_1, x_{n_0+1} = c_2, \ldots, x_{n_0+k-1} = c_k, x_{n+k} = -p_1(n)x_{n_+k-1} - \cdots - p_k(n)x_n, n \geq n_0$$

alors,

$$\varphi((x_n)_{n \geq n_0}) = (c_1, c_2, \ldots, c_k)$$

donc φ est surjectif.
Comme $dim(\mathbb{K}^k) = k$, on déduit que S est un espace vectoriel de dimension k. ■

Définition 2.1.4 Le ***Casoratien*** $W(n)$ des solutions $(x_n^1)_{n \geq n_0}, (x_n^2)_{n \geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n \geq n_0}$ de l'équation aux différences (2.5) est donné par

$$W(n) = det\begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^k \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k-1}^1 & x_{n+k-1}^2 & \cdots & x_{n+k-1}^k \end{pmatrix}.$$

■ **Example 2.4** Soit l'équation aux différences linéaire d'odre 2 suivante

$$x_{n+2} - \frac{3n-2}{n-1}x_{n+1} + \frac{2n}{n-1}x_n = 0, \; n = 2, 3, \ldots$$

qui admette les solutions n et 2^n, alors le Casoratien de ces solutions est donné par

$$\begin{aligned}
W(n) &= det\begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= n.2^{n+1} - 2^n(n+1) \\
&= 2^n(n-1).
\end{aligned}$$

■

Définition 2.1.5 Les fonctions $f_1(n), f_2(n), \ldots, f_k(n)$ sont linéaires dépendants pour $n \geq n_0$ si existe des constants $a_1, a_2, \ldots, a_k$ non nuls tels que

$$a_1 f_1(n) + a_2 f_2(n) + \ldots + a_k f_k(n) = 0, \quad n \geq n_0.$$

On dit que la famille des fonctions $\{f_i(n)\}_{i=1}^{k}$, sont linéairement indépendantes si pour tout $n \in \mathbb{N}_{n_0}$

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_i(n) = 0 \Rightarrow \alpha_i = 0, i = 1, 2, \ldots, k, \quad \alpha_i \in \mathbb{R}.$$

Lemme 2.1.3 (Lemme d'Abel) Soient $(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n\geq n_0}$ sont des solutions de l'équation homogène (2.5), et soit $W(n)$ leur Casoratien alors, pour tout $n \geq n_0$

$$W(n) = (-1)^{k(n-n_0)} \left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_k(i) \right) W(n_0). \tag{2.6}$$

Proof. On démontre le lemme pour $k = 3$, le cas générale se démontre de la même façon. On a On a

$$W(n) = det \begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^2 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^2 \end{pmatrix}.$$

Donc

$$W(n+1) = det \begin{pmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^2 \\ x_{n+3}^1 & x_{n+3}^2 & x_{n+3}^2 \end{pmatrix}.$$

De l'équation (1), on pour $i = 1, 2, 3$

$$x_{n+3}^i = -p_1(n) x_{n+2}^i - p_2(n) x_{n+1}^i - p_3 x_n^i.$$

Ainsi

$$W(n+1) = \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^2 \\ -p_1(n)x_{n+2}^1 - p_2(n)x_{n+1}^1 - p_3 x_n^1 & -p_1(n)x_{n+2}^2 - p_2(n)x_{n+1}^2 - p_3 x_n^2 & -p_1(n)x_{n+2}^3 - p_2(n)x_{n+1}^3 - p_3 x_n^3 \end{vmatrix}.$$

On fait l'operation $L_3 = L_3 + p_1 L_2 + p_2 L_1$, on obtien

$$\begin{aligned} W(n+1) &= \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^2 \\ -p_3 x_n^1 & -p_3 x_n^2 & -p_3 x_n^3 \end{vmatrix}. \\ &= -p_3 \begin{vmatrix} x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^3 \\ x_{n+2}^1 & x_{n+2}^2 & x_{n+2}^2 \\ x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \end{vmatrix}. \\ &= -p_3 \begin{vmatrix} x_n^1 & x_n^2 & x_n^3 \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & x_{n+1}^2 \\ x_{n+3}^1 & x_{n+3}^2 & x_{n+3}^3 \end{vmatrix} \\ &= (-1)^3 p_3(n) W(n). \end{aligned}$$

Donc
$$W(n) = (-1)^{3n}\left(\prod_{i=n_0}^{n-1} p_3(i)\right) W(0).$$
Car
$$y_{n+1} = a(n)y_n \Rightarrow y_n = \left[\prod_{i=n_0}^{n-1} a(i)\right] y_0.$$
(Voir exercice (**??**)). ■

Corollaire 2.1.4
Supposons que $p_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$. Alors le Casoratien $W(n) \neq 0$ pour chaque $n \geq n_0$ si et seulement si $W(n_0) \neq 0$.

Proof. Il découle directement de la formule (2.6). ■

Proposition 2.1.5
Soit $B = \left\{(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\}$ une ensemble des solutions de l'équation aux différences (2.5), alors B est libre si et seulement si $W(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$.

Proof. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k \in \mathbb{K}$ tels que
$$\alpha_1 x_n^1 + \alpha_2 x_n^2 + \cdots + \alpha_k x_n^k = 0, \quad \forall n \geq n_0$$
donc
$$\begin{cases} \alpha_1 x_n^1 + \alpha_2 x_n^2 + \cdots + \alpha_k x_n^k = 0, \\ \alpha_1 x_{n+1}^1 + \alpha_2 x_{n+2}^2 + \cdots + \alpha_k x_{n+1}^k = 0, \\ \vdots \\ \alpha_1 x_{n+k-1}^1 + \alpha_2 x_{n+k-1}^2 + \cdots + \alpha_k x_{n+k-1}^k = 0, \end{cases}$$
ce système sécrit
$$X(n)b = 0$$
avec
$$X(n) = \begin{pmatrix} x_n^1 & x_n^2 & \cdots & x_n^k \\ x_{n+1}^1 & x_{n+1}^2 & \cdots & x_{n+1}^k \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n+k-1}^1 & x_{n+k-1}^2 & \cdots & x_{n+k-1}^k \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_k \end{pmatrix}.$$
Donc le système admet le vecteur nul comme solution si et seulement si $X(n)$ est inversible, c'est à dire
$$det X(n) = W(n) \neq 0, \quad \forall n \geq n_0.$$
■

Définition 2.1.6
Un ensemble de k solutions libres de l'équation aux différences (2.5) dit ***ensemble fondamentale*** des solutions.

Example 2.5
Vérifier que $\{n, 2^n\}$ est un ensemble fondamentale des solutions de l'équation aux différences

$$x_{n+2} - \frac{3n-2}{n-1}x_{n+1} + \frac{2n}{n-1}x_n = 0, \quad n \geq 2.$$

Il facile de voir que n et 2^n son des solutions de catte equation. Maintenat la Casoratien des solution n et 2^n est donner par

$$W(n) = det\begin{pmatrix} n & 2^n \\ n+1 & 2^{n+1} \end{pmatrix}$$

Donc

$$W(2) = det\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = 4 \neq 0$$

Alors d'aprés la proposition (2.1.5) n et 2^n sont libres, et donc forme un ensemble fondamentale. ■

Le théorème suvant montre que l'équation aux différences linéaire homogène (2.5) admet toujours un ensemble fondamentale des solutions (c'est-à-dire une base des solutions).

Théorème 2.1.6 (**Théorème fondamental**)
Si $p_k(n) \neq 0, \forall n \geq n_0$, l'équation aux différences linéaire homogène (2.5) admet un ensemble fondamentale de solutions.

Proof. Soit l'équation aux différences linéaire homogène (2.5) qui admet les solutions $(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n\geq n_0}$, qui obtenues en associant k valeurs initiales comme suit

$$\begin{array}{ll} (x_n^1)_{n\geq n_0}: & x_{n_0}^1 = 1, x_{n_0+1}^1 = x_{n_0+2}^1 = \cdots = x_{n_0+k-1}^1 = 0, \\ (x_n^2)_{n\geq n_0}: & x_{n_0}^2 = 0, x_{n_0+1}^2 = 1, x_{n_0+2}^2 = \cdots = x_{n_0+k-1}^1 = 0, \\ \vdots & \qquad\qquad\qquad \vdots \\ (x_n^k)_{n\geq n_0}: & x_{n_0}^k = x_{n_0+1}^k = \cdots = x_{n_0+k-2}^k = 0, x_{n_0+k-1}^k = 1. \end{array}$$

Ainsi

$$W(n_0) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Donc d'aprés la proposition (2.1.5) et le corroliare (2.1.4) l'ensemble

$$\left\{(x_n^1)_{n\geq n_0}, (x_n^2)_{n\geq n_0}, \ldots, (x_n^k)_{n\geq n_0}\right\}$$

forme une base pour l'espace des solutions de l'équation (2.5). ■

Proposition 2.1.7 Si $x_n^1, x_n^2, \ldots, x_n^k$ sont des solutions de l'équation (2.5). Alors

$$x_n = a_1 x_n^1 + a_2 x_n^2 + \ldots + a_k x_n^k$$

est aussi est un solution de l'équation (2.5), avec a_i sont des constants arbitraires.

Proof. On a

$$\begin{aligned}
x_{n+k}+p_1(n)x_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x_n &= a_1x^1_{n+k}+a_2x^2_{n+k}+\ldots+a_kx^k_{n+k} \\
&+ p_1(n)a_1x^1_{n+k-1}+a_2x^2_{n+k-1}+\ldots+a_kx^k_{n+k-1} \\
&\vdots \\
&+ p_k(n)a_1x^1_{n}+a_2x^2_{n}+\ldots+a_kx^k_{n} \\
&= a_1\left(x^1_{n+k}+p_1(n)x^1_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x^1_n\right) \\
&+ a_2\left(x^2_{n+k}+p_1(n)x^2_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x^2_n\right) \\
&\vdots \\
&+ a_k\left(x^k_{n+k}+p_1(n)x^k_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x^k_n\right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Donc

$$x_n = a_1x^1_n+a_2x^2_n+\ldots+a_kx^k_n$$

est un solution de l'équation (2.5). ■

Corollaire 2.1.8 Soit $\left\{(x^1_n)_{n\geq n_0},(x^2_n)_{n\geq n_0},\ldots,(x^k_n)_{n\geq n_0}\right\}$ un ensemble fondamentale de solutions de l'équation (2.5). Alors la solution génélale de (2.5) est donné par

$$x_n=\sum_{i=1}^{k}a_ix^i_n$$

avec a_i sont des constants arbitraires.

Lemme 2.1.9 Soient $(x_n)_{n\geq n_0},(y_n)_{n\geq n_0}$ deux solutions de l'équation (2.1), alors $(z_n)_{n\geq n_0}=(x_n-y_n)_{n\geq n_0}$ est une solution de l'équation (2.5).

Proof.
On a $(x_n)_{n\geq n_0},(y_n)_{n\geq n_0}$ sont des solutions de l'équation (2.1), alors

$$x_{n+k}+p_1(n)x_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)x_n=g(n)$$

et

$$y_{n+k}+p_1(n)y_{n+k-1}+\ldots+p_k(n)y_n=g(n)$$

donc

$$x_{n+k}-y_{n+k}+p_1(n)(x_{n+k-1}-y_{n+k-1})+\ldots+p_k(n)(x_n-x_n)=0$$

Par conséquent, $(z_n)_{n\geq n_0}=(x_n-y_n)_{n\geq n_0}$ est une solution de l'équation (2.5). ■

Théorème 2.1.10 Soient $\left\{(x^1_n)_{n\geq n_0},(x^2_n)_{n\geq n_0},\ldots,(x^k_n)_{n\geq n_0}\right\}$ un ensemble fondamental de solutions de l'équation (2.5) et $(x^p_n)_{n\geq n_0}$ une solution particulière de l'équation (2.1), alors toute solutions générale de l'équation (2.1) prend la forme

$$x_n=\sum_{i=1}^{k}a_ix^i_n+x^p_n,\quad n\geq n_0.$$

Proof.
Si $(x_n)_{n\geq n_0}$ est la solution générale de (2.1), et $(x_n^p)_{n\geq n_0}$ une solution particulière de cette équation, alors d'après le lemme (2.1.9), $(x_n - x_n^p)_{n\geq n_0}$ est une solution de l'équation (2.5), ainsi

$$x_n - x_n^p = \sum_{i=1}^{k} a_i x_n^i, \quad a_i \in \mathbb{K}, \forall i = 1,\dots,k, n \geq n_0.$$

■

2.2 Les équations aux différences linéaires à coefficients constants

Dans toute la suite, on s'intéresse aux équations aux différences à coefficients constants homogènes, c'est-à-dire

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \cdots + p_k x_n = 0. \tag{2.7}$$

Les p_i sont des constantes réels ou complexes.

2.2.1 Résolution de l'équation homogène

Notre but et trouver un ensemble fondamentale de solutions et, par conséquent la solution générale de l'équation (2.7).

Théorème 2.2.1 L'équation (2.7) a des solutions de la forme

$$x(n) = \lambda^n$$

avec $\lambda \in \mathbb{C}^*$et vérifie

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0. \tag{2.8}$$

Proof. En remplaçant par $x(n) = \lambda^n$ dans l'équation (2.7), on trouve

$$\lambda^n \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0$$

puisque

$$\sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i} = 0.$$

Alorsλ^n est une solutions de l'équation (2.7). ■

Définition 2.2.1 Le polynôme

$$P(\lambda) = \sum_{i=0}^{k} p_i \lambda^{k-i}$$

s'appelle le ***polynôme caractéristique*** associé à l'équation (2.7).

■ **Example 2.6**

1. Le polynôme caractéristique associé à l'équation
$$x_{n+4}+2x_{n+3}-x_{n+2}+7x_{n+1}-3x_n=0$$
est
$$P(\lambda)=\lambda^4+2\lambda^3-\lambda^2+7\lambda-3.$$
2. Le polynôme caractéristique associé à l'équation
$$x_{n+3}+5x_{n+1}-12x_n=0$$
est
$$P(\lambda)=\lambda^3+5\lambda-12.$$

■

Théorème 2.2.2
Si les racines $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_k$ du polynôme caractéristique $P(\lambda)$ sont distinctes, alors $\{\lambda_1^n,\lambda_2^n,\ldots,\lambda_k^n\}$ est un ensemble fondamental des solutions pour l'équation (2.7) .

Proof. Si $\lambda_1,\ldots,\lambda_k$ sont des racines distinctes du $P(\lambda)$ alors $\{\lambda_1^n,\ldots,\lambda_k^n\}$ sont k solutions de l'équation (2.7). Montrons qu'ils sont linéairement indépendantes. Il suffit de trouver un n_0 tel que $W(n_0)\neq 0$.
Le Casoratient des donné par
$$W(n)=det\begin{pmatrix}\lambda_1^n & \lambda_2^n & \cdots & \lambda_k^n\\ \lambda_1^{n+1} & \lambda_2^{n+1} & \cdots & \lambda_k^{n+1}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{n+k-1} & \lambda_2^{n+k-1} & \cdots & \lambda_k^{n+k-1}\end{pmatrix}$$
choisissons $n_0=0$, on obtient
$$W(0)=det\begin{pmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{pmatrix}=\prod_{i>j,i,j=1,\ldots,k}(\lambda_i-\lambda_j)$$
Ainsi
$$W(0)\neq 0,$$
alors $\{\lambda_1^n,\lambda_2^n,\ldots,\lambda_k^n\}$ est libre donc forme un ensemble fondamental des solutions pour l'équation (2.7). ■

R

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & \cdots & 1\\ \lambda_1 & \lambda_2 & \cdots & \lambda_k\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \lambda_1^{k-1} & \lambda_2^{k-1} & \cdots & \lambda_k^{k-1}\end{vmatrix}=\prod_{i>ji,j=1,\ldots,k}(\lambda_i-\lambda_j)$$

est appelé le déterminant de Vandermonde gènèralisè.

Corollaire 2.2.3 Du théorème précédent, il résulte que toute solution de l'équation (2.7) s'écrit comme combinaison linéaire de $\lambda_i^n, i = 1, \ldots, k$, i.e,

$$x(n) = \sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i^n, c_i \in \mathbb{R}$$

avec $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ sont des racines distinctes du polynôme caractéristique $P(\lambda)$.

Théorème 2.2.4 Supposons que $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$, $r < k$ sont les racines du polynôme caractéristique associé à l'équation (2.7) avec les multiplicitée $m_1, m_2, \ldots, m_r$ respectivement ($\sum_{i=1}^{r} m_i = k$). alors

$$\Big\{ (\lambda_1^n)_{n\geq n_0}, (n\lambda_1^n)_{n\geq n_0}, \ldots, (n^{m_1-1}\lambda_1^n)_{n\geq n_0}, (\lambda_2^n)_{n\geq n_0}, (n\lambda_2^n)_{n\geq n_0}, \ldots, (n^{m_2-1}\lambda_2^n)_{n\geq n_0}, \cdots$$

$$(\lambda_r^n)_{n\geq n_0}, (n\lambda_r^n)_{n\geq n_0}, \ldots, (n^{m_r-1}\lambda_r^n)_{n\geq n_0}, \Big\}$$

est un ensemmble fondamental pour l'équation (2.7).

Corollaire 2.2.5 La solution générale de l'équation (2.7)s'écrit :

$$y(n) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n, c_{i,j} \in \mathbb{R}$$

où

- Le paramètre $s \leq k$ désigne le nombre de racines distinctes de l'équation caractéristique (2.8).
- Le paramètre λ_i désigne une racine de l'équation caractéristique (2.8).
- Le paramètre m_i désigne la multiplicité de la racine λ_i.
- Les coefficients $c_{i,j}$ sont des constantes qui sont déterminées à partir des conditions initiales.

■ **Example 2.7** **(Racines réelles simples)**
On considère l'équation

$$x_{n+2} - x_{n+1} - \frac{1}{4} x_n = 0, \text{ avec } x_0 = 0 \quad et \quad x_1 = 1. \tag{2.9}$$

L'équation caractéristique de (2.9) est

$$\lambda^2 - \lambda - \frac{1}{4} = 0.$$

Ainsi, les racines sont

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{2}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

La solution générale de l'équation (2.9) s'écrit

$$x_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{2}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{2}}{2} \right)^n$$

Utilisons les conditions initiales, on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad c_2 = \frac{-1}{\sqrt{2}}.$$

D'ou
$$x_n = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{1-\sqrt{2}}{2}\right)^n.$$

■

■ **Example 2.8** (**Racines réelles multiples**)
Considérons l'équation aux différences linéaires d'ordre 3.

$$x_{n+3} - 4x_{n+2} + \frac{13}{4}x_{n+1} - \frac{3}{4}x_n = 0, \quad n \geq 0 \tag{2.10}$$

avec $x_0 = 0, x_1 = 1, x_2 = 1$.
Son polynôme caractéristique associé est

$$p(\lambda) = \lambda^3 - 4\lambda^2 + \frac{13}{4}\lambda - \frac{3}{4}$$

qui admet deux racines

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = \lambda_3 = \frac{1}{2} \text{ (racine double) }.$$

La solution générale de(2.10) s'écrit

$$x_n = c_1(3)^n + (c_2 + c_3 n)\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Pour trouver les constantes c_1, c_2 et c_3 on résoudre le système

$$\begin{cases} x_0 = & c_1 + c_2 & = 0 \\ x_1 = & 3c_1 + \frac{1}{2}c_2 + \frac{1}{2}c_3 & = 1 \\ x_2 = & 9c_1 + \frac{1}{4}c_2 + \frac{1}{2}c_3 & = 1 \end{cases}$$

alors
$$c_1 = 0, c_2 = 0 \quad et \quad c_3 = 2.$$

D'où
$$x_n = 2n\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

■

■ **Example 2.9** (**Racines complexes conjuguées**)
Considérons l'équation aux différences linéaire d'ordre 2.

$$x_{n+2} - 2x_{n+1} + 2x_n = 0, \quad n \geq 0, \tag{2.11}$$

avec $x_0 = 1, x_1 = 2$.
Son polynôme caractéristique associé est

$$p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

L'équation (2.11) admet deux racines complexes

$$\lambda_1 = 1 + i, \lambda_2 = 1 - i$$

la solution générale est alors
$$x_n = c_1(1+i)^n + c_2(1-i)^n.$$

Pour trouver les constantes c_1 et c_2 on résoudre le système

$$\begin{cases} x_0 = & c_1 + c_2 & = 1 \\ x_1 = & c_1(1+i) + c_2(1-i) & = 2 \end{cases}$$

alors

$$c_1 = \frac{1}{2} - \frac{i}{2} \quad et \quad c_1 = \frac{1}{2} + \frac{i}{2}.$$

D'où

$$\begin{aligned} x_n &= \left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)(1+i)^n + \left(\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)(1-i)^n, \\ &= \frac{1}{2}(1+i)^{n+1} + \frac{1}{2}(1-i)^{n+1}. \end{aligned}$$

En cordonnés polaires:

$$\alpha = r\cos\theta, \beta = r\sin\theta, r = \sqrt{2}, \theta = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\Pi}{4}.$$

donc

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\Pi}{4}\right) + i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\Pi}{4}\right)\right)^{n+1} + \frac{1}{2}\left(\sqrt{2}\cos\left(\frac{\Pi}{4}\right) - i\sqrt{2}\sin\left(\frac{\Pi}{4}\right)\right)^{n+1} \\ &= \frac{\sqrt{2}^{n+1}}{2}\left(\cos\left(\frac{(n+1)\Pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{(n+1)\Pi}{4}\right)\right) + \frac{\sqrt{2}^{n+1}}{2}\left(\cos\left(\frac{(n+1)\Pi}{4}\right) - i\sin\left(\frac{(n+1)\Pi}{4}\right)\right) \\ &= \sqrt{2}^{n+1}\left(\cos\left(\frac{(n+1)\Pi}{4}\right)\right). \end{aligned}$$

■

■ **Example 2.10** (**Suite de Fibonacci**)

En 1202, Fibonacci s'intéresse au problème de croissance d'une population de lapins dans des circonstances idéales. Le problème est le suivant:

- On commence avec un nouveau né couple de lapins,
- Un lapin âgé d'un mois est capable de se reproduire,
- Un couple de lapins (en âge de se reproduire) donne naissance à un autre couple de lapins tous les mois,
- Les lapins ne meurent pas.

Fibonacci se posa la question suivante : combien y aura-t-il de couples de lapins après une année ? La figure (2.1) illustre l'évolution du nombre de couples de lapins au fur et à mesure des mois.

On remarque que la suite formée par les nombres de couples aprés chaque mois est la suivante :

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \cdots$$

Cette suite de nombres est appelée suite de Fibonacci.

Définition 2.2.2 La suite de Fibonacci est la suite $\{F_n\}_{n\geq 0}$ telle que $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \tag{2.12}$$

pour tout $n \geq 0$.
- Les termes de cette suite sont appelés nombres de Fibonacci.

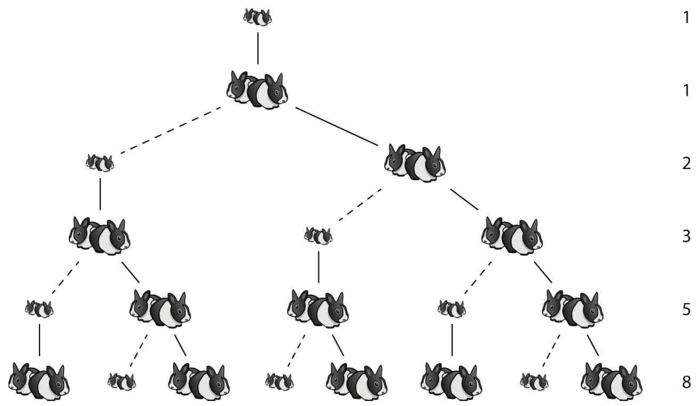

Figure 2.1:

R La suite de Fibonacci est une équation aux différences linéaire a coefficients constantes homogène d'ordre 2.

Soit la suite de Fibonacci

$$F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0, \text{ avec } F_0 = 0 \text{ et } F_1 = 1. \tag{2.13}$$

L'équation caractéristique de (2.13) est

$$\lambda^2 - \lambda - 1 = 0.$$

Ainsi, les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \lambda_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

La solution générale de l'équation (2.13) s'écrit

$$F_n = c_1 \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n + c_2 \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n,$$

utilisons les conditions initiales, on obtient

$$c_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}, c_2 = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

d'ou

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n. \tag{2.14}$$

Définition 2.2.3 La formule (2.14) est dite La formule de Binet.
Autrement dit:

$$F_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}, n \in \mathbb{N}, \tag{2.15}$$

avec

$$\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \quad \beta = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ s'appelle le ***nombre d'or***.

■

2.2.2 Résolution de l'équation non homogène

Soit l'équation aux différences linéares non homogène a coefficients constants

$$x_{n+k} + p_1 x_{n+k-1} + p_2 x_{n+k-2} + \cdots + p_k x_n = g(n). \tag{2.16}$$

Le principe de résolution consiste à éliminer d'abord la fonction $g(n)$, et ensuite résoudre l'équation homogène. Une technique permettant d'éliminer plusieurs types de fonctions $g(n)$, est l'utilisation de l'opérateur d'avancement E.

Opérateur d'avancement

Définition 2.2.4 Étant donnée une suite de nombres entiers $f(n)$, l'opérateur d'avancement E est défini comme suit

$$\begin{aligned} f(n) &= c \text{ (une constante)} \Rightarrow E(f(n)) = c, \\ f(n) &\neq \text{ constante } \Rightarrow E(f(n)) = f(n+1). \end{aligned}$$

■ **Example 2.11**

$$\begin{aligned} f(n) &= 2 \Rightarrow E(f(n)) = 2. \\ f(n) &= (n+1)^2 \Rightarrow E(f(n)) = (n+2)^2. \end{aligned}$$

D'autres opérateurs peuvent aussi être crées en combinant l'opérateur E à lui-même ou à des constantes. Pour ce faire, on définit pour la constante c l'opérateur de même nom c comme suit.

$$c(f(n)) = c \times f(n).$$

La multiplication et l'addition d'opérateurs sont définies comme suit:

$$\begin{aligned} (E_1 \times E_2) f(n) &= E_1(E_2(f(n))), \\ (E_1 + E_2) f(n) &= E_1(f(n)) + E_2(f(n)). \end{aligned}$$

■

R Il est facile de vérifier que :

1. L'addition et la multiplication d'opérateurs sont commutatives
$$(E_1 + E_2) f(n) = (E_1 + E_2) f(n),$$
$$(E_1 \times E_2) f(n) = (E_1 \times E_2) f(n).$$
2. L'addition et la multiplication d'opérateurs sont associatives
$$\begin{aligned} ((E_1 + E_2) + E_3) f(n) &= (E_1 + (E_2 + E_3)) f(n), \\ ((E_1 \times E_2 E_3)) f(n) &= (E_1 (E_2 \times E_3)) f(n). \end{aligned}$$

■ **Example 2.12** Soit l'équation aux différences suivante:

$$x_{n+1} - x_n = n, \quad x_0 = 1.$$

On applique l'opérateur E, on obtient

$$\begin{array}{rcl}(E-1)(n) & = & E(n)-n=1 \\ (E-1)(1) & = & 0\end{array}$$

par conséquent

$$(E-1)^2(x_{n+1}-x_n)=0$$

développant cette relation, on obtient

$$x_{n+3}-3x_{n+2}+3x_{n+1}-x_n=0$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1=1(triple)$$

la solution est de la forme

$$x_n=a_0+a_1n+a_2n^2$$

pour trouver les constants a_0, a_1, a_2 on va calculer x_1, x_2 on obtient

$$\left\{\begin{array}{rcccl} x_0 & = & a_0 & = & 1 \\ x_1 & = & a_0+a_1+a_2 & = & 2 \\ x_2 & = & a_0+2a_1+4a_2 & = & 4 \end{array}\right.$$

alors $a_0=1$ et $a_1=\frac{1}{2}, a_2=\frac{1}{2}$ donc la solution est:

$$x_n=1+\frac{1}{2}n+\frac{1}{2}n^2.$$

■

■ **Example 2.13** Soit l'équation aus différences suivante :

$$x_{n+1}-n_n=n\times 2^n,\ avec\ x_0=0.$$

On applique l'opérateur E, on obtient

$$(E-2)^2(n\times 2^n)=0$$

par conséquent

$$(E-2)^2(x_{n+1}-x_n)=0$$

développant cette relation on obtient

$$x_{n+3}-5x_{n+2}+8x_{n+1}-4x_n=0.$$

alors l'équation caractéristique s'écrit comme

$$\lambda^3-5\lambda^2+8\lambda-4=0$$

les racines caractéristiques sont

$$\lambda_1=1(simple), \lambda_2=2(double)$$

la solution est de la forme

$$x_n = (a_0 + a_1 n)2^n + a_2$$

pour trouver les constants a_0, a_1, a_2, on va calculer x_1, x_2 on obtient

$$\begin{cases} x_0 & = & a_0 + a_2 & = 0 \\ x_1 & = & 2a_0 + 2a_1 + a_2 & = 2 \\ x_2 & = & 4a_0 + 8a_1 + a_2 & = 10 \end{cases}$$

alors $a_0 = -2$ et $a_1 = 2$, $a_2 = 2$, donc la solution est:

$$x_n = (n-1)2^{n+1} + 2.$$

■

Le tableau ci-dessous résume l'expression à employer pour éliminer quelques fonctions $g(n)$ dans les équations non homogènes. Dans le tableau qui suit, $P_k(n)$ et α représentent un polynôme en n de degré k et une valeur entière respectivement.

Fonction $g(n)$	Éliminateur correspondant
$g(n) = constante$	$(E-1)$
$g(n) = p_k(n)$	$(E-1)^{k+1}$
$g(n) = \alpha^n$	$(E-\alpha)$
$g(n) = \alpha^n p_k(n)$	$(E-\alpha)^{k+1}$

2.2.3 Analyse de la stabilité des solutions

Définition 2.2.5 On dit que'une solution $(\bar{x}_n)_{n \geq n_0}$ de l'équation (2.7) est **stable**, si pour toute autre solution $(x_n)_{n \geq n_0}$ de la même équation

$$e_n = x_n - \bar{x}_n, \quad n \geq n_0$$

est borné.

Définition 2.2.6 On dit qu'une solution $(\bar{x}_n)_{n \geq n_0}$ de l'équation (2.7) est **asymptotiquement stable**, si $(\bar{x}_n)_{n \geq n_0}$ est stable et pour toute autre solution $(x_n)_{n \geq n_0}$ de la même équation

$$\lim_{n \to +\infty} e_n = \lim_{n \to +\infty} x_n - \bar{x}_n = 0.$$

Définition 2.2.7 Une solution $(\bar{x}_n)_{n \geq n_0}$ de l'équation (2.7) est dite **instable** si elle est non stable.

Théorème 2.2.6
Une solution $(\bar{x}_n)_{n \geq n_0}$ de l'équation (2.7) est asymptotiquement stable si et seule- ment si les racines du npolunôme caractéristique sont à l'intérieur du dusc unité, c'est-à-dir

$$(\bar{x}_n)_{n \geq n_0} \; \textit{est asymptotiquement stable} \Leftrightarrow |\lambda_i| < 1, i = 1, \ldots, s.$$

Proof. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les racines du polynôme caractéristique avec les multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_s$, tel que $m_1 + m_2 + \cdots + m_s = k$. On a

$$x_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i - 1} c_{i,j} n^j \lambda_i^n,$$

et

$$\bar{x}_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} \bar{c}_{i,j} n^j \lambda_i^n,$$

donc

$$x_n - \bar{x}_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} (c_{i,j} - \bar{c}_{i,j}) n^j \lambda_i^n, \tag{2.17}$$

i) Si $|\lambda_1| < 1, i = 1, \ldots, s$, le membre de droite dans (2.17) tend vers zero quand $n \to \infty$, c'est-à-dire

$$\lim_{n \to +\infty} x_n - \bar{x}_n = 0.$$

ii) Inversement si

$$\lim_{n \to +\infty} x_n - \bar{x}_n = 0.$$

en supposant qu'il existe une racine λ_*. de module ≥ 1, le(s) terme(s) $n\lambda_*^n$ ne tend(s) pas vers zero. Contradiction

■

Théorème 2.2.7 Une solution $(\bar{x}_n)_{n \geq n_0}$ de l'équation (2.7) est stable si et seulement si les modules des racines du polynôme caractéristique sont inférieures ou égales à 1 avec ceux du module 1 sont des racines simples.

Proof. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ les racines du polynôme caractéristique avec les multiplicités respectives $m_1, m_2, \ldots, m_s$. Soit $(x_n)_{n \geq n_0}$ une autre solution de l'équation (2.7), alors

$$x_n - \bar{x}_n = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{m_i-1} (c_{i,j} - \bar{c}_{i,j}) n^j \lambda_i^n, \tag{2.18}$$

Il est clair que si n est finie la quantite (2.18) est bornee. Il nous reste a etudier le comportement de cette quantite quand $n \to +\infty$.

i) les termes qui correspondent à des racines de modules inférieur à 1 tends vers zéro et ceux qui correspondent à des racines de module 1 (donc simples) donnent une quantité bornée.

ii Inversement supposons que la quantité (2.18) est bornée. S'il existe une racine de $P(\lambda)$ de module supérieur à 1, alors (2.18) tend vers l'infini. Contradiction.

■

■ Example 2.14

Considérons l'équation suivant

$$x_{n+2} - \frac{5}{6} x_{n+1} + \frac{1}{6} x_n = 0 \tag{2.19}$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$P(\lambda) = (\lambda - \frac{1}{2})(\lambda - \frac{1}{3}).$$

Les racines de $P(\lambda)$ $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{3}$ sont des modules inferiur à 1. donc les solution de (2.19) sont asymptotiquement stable. ■

■ **Example 2.15**
Considérons l'équation suivant

$$x_{n+3} - \frac{7}{2}x_{n+2} + \frac{7}{2}x_{n+1} - x_n = 0 \tag{2.20}$$

Son polynôme caractéristique est donné par

$$P(\lambda) = \lambda^3 - \frac{7}{2}\lambda^2 + \frac{7}{2}\lambda - 1$$

Les racines de $P(\lambda)$ sont $\frac{1}{2}$, 2 et 1. On a $|2| \geq 1$ donc les solution de (2.20) n'est pas stable. ■